

Научная статья
УДК 621.01: 531.43
<https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-110-118>

Учет трения в математических моделях диссипативных систем

Михаил Иванович Вольников^{1}, Владимир Васильевич Смогунов²*

¹*Пензенский государственный технологический университет,
Пенза, Россия, vmi1972@yandex.ru*

²*Пензенский государственный университет,
Пенза, Россия*

Аннотация. Получение моделей механических процессов с диссипацией на основе теории Эйлера–Лагранжа имеет несомненные преимущества перед теорией Ньютона за счет меньшего размера рассматриваемого вектора переменных, входящих в уравнения. Однако вариационная теория Эйлера–Лагранжа не применима к описанию движения систем с диссипацией. Целью работы является возможность продемонстрировать использование теории Эйлера–Лагранжа применительно к диссипативным системам с различными видами трения. Математические модели систем с диссипацией построены на основе суперпозиции механического и термодинамического лагранжианов. Для получения математического описания диссипативных систем предложено использовать полевую теорию применительно к термодинамике диссипативных процессов в рамках формализма Лагранжа. В результате проведенной работы получены уравнения Эйлера–Лагранжа для моделей трения Стокса и Кулона. На основе результатов, полученных в работе, показана возможность учета диссипации энергии в формализме Лагранжа. Предложены математические модели, описывающие динамические процессы в гетерогенных структурах с трением на основе теории Эйлера–Лагранжа. Представлены математические преобразования, которые позволяют осуществлять переход от моделей, полученных на основе формализма Лагранжа, к моделям на основе механики Ньютона.

Ключевые слова: трение, энергия, диссипативные системы, модели, лагранжиан, зависимость

Для цитирования: Вольников М. И., Смогунов В. В. Учет трения в математических моделях диссипативных систем // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 2. С. 110–118. <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-110-118>.

Original article

Friction accounting in mathematical models of dissipative systems

Mikhail I. Volnikov^{1}, Vladimir V. Smogunov²*

¹*Penza State Technological University,
Penza, Russia, vmi1972@yandex.ru*

²*Penza State University,
Penza, Russia*

Abstract. Obtaining models of mechanical processes with dissipation based on the Euler-Lagrange theory has undoubted advantages over Newton's theory due to the smaller size of the considered vector of variables included in the equations. However, the Euler-Lagrange variation theory is not applicable to the description of the motion of systems with dissipation. The aim of the work is to demonstrate the possibility of using the Euler-Lagrange theory in relation to dissipative systems with different types of friction. Mathematical models of systems with dissipation are based on the superposition of mechanical and thermodynamic Lagrangians. To obtain a mathematical description of dissipative systems it is proposed to use the field theory as applied to the thermodynamics of dissipative processes within the framework of the Lagrange formalism. The Euler-Lagrange equations are obtained for the Stokes and Coulomb friction models. As it was referred to the research results obtained there is possibility of accounting the energy dissipation in the Lagrange formalism. The mathematical models proposed describe dynamic processes in heterogeneous structures with friction based on the Euler-Lagrange theory. There are presented mathematical transformations that allow transition from models based on the Lagrange formalism to models based on Newtonian mechanics.

Keywords: friction, energy, dissipative systems, models, Lagrangian, dependence

For citation: Volnikov M. I., Smogunov V. V. Friction accounting in mathematical models of dissipative systems. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics.* 2022;2:110-118. (In Russ.) <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-110-118>.

Введение

Силы трения, относящиеся к силам сопротивления, возникают повсеместно: это внешнее трение в движущихся соединениях деталей машин и механизмов, трение в неподвижных прессовых, заклепочных, болтовых и др. соединениях за счет микропроскальзывания при нагрузках системы в местах контакта, это и внутреннее трение в материалах элементов системы. К силам трения относят и силы сопротивления среды, которые возникают, например, при движении конструкции в газе или жидкости.

Механическая энергия при трении не исчезает, а происходит ее диссипация – превращение в тепловую энергию. Однако адекватно описать поведение систем под действием трения – нетривиальная задача из-за различных форм проявления трения.

В каждом конкретном случае величина трения зависит от многих факторов (нагрузки, скорости движения, материалов, шероховатости, наличия смазки, температурного воздействия и др.).

Для описания динамики гетероструктур с трением используются два метода. Векторная механика базируется на законах Ньютона и двух основных векторах – «импульсе» и «силе» – и включает анализ и синтез сил и моментов. Второй метод основывается на вариационной теории Эйлера и Лагранжа, базирующейся на скалярных величинах: кинетической и потенциальной энергиях.

В векторном методе для описания движения используются «поддерживающие связи», для которых нужно придумывать различные гипотезы. В скалярном методе все действующие силы (упругости, тяжести и др.) выходят из одной скалярной величины – «силовой функции», выполняющей роль потенциальной энергии. Однако сила трения не связана с потенциальной энергией и оказывается вне области применения вариационных принципов. Получение адекватного описания моделей механических систем с трением, с опорой на формализм Лагранжа, является актуальной целью исследования из-за явного преимущества перед теорией Ньютона.

Преимущества вариационной теории Эйлера и Лагранжа очевидны, т. к. энергия является величиной скалярной, ее намного проще преобразовывать и дифференцировать при заменах координат, чем ускорения и силы, входящие в уравнения Ньютона и имеющие векторный характер. Особенно эти преимущества становятся очевидными по мере увеличения размерности системы. При движении одной частицы это преимущество несущественно, однако по мере увеличения числа элементов в рассматриваемой системе, где согласно теории Ньютона для каждого элемента необходимо записывать 3-мерные уравнения движения с учетом взаимных связей, это преимущество возрастает, поэтому использование теории Ньютона сильно усложняет

решение задачи с трением, что непременно требует поиска возможных путей применения вариационных методов для упрощения расчетов.

Фундаментальные основы построения моделей гетероструктур с трением

Как уже было сказано, сила трения не имеет «силовой функции», а значит формализм Лагранжа не применим к вариационной теории Эйлера и Лагранжа. Но данное ограничение не является поводом отказываться от применения теории Лагранжа. Формализм Лагранжа основывается на принципе наименьшего действия Гамильтона и является унифицированной процедурой, применимой к каждой физической системе [1].

Лагранжева механика является интерпретацией классической механики Ньютона. Как известно, функция Лагранжа для классической механики представляет разность между кинетической и потенциальной энергией и имеет название «функция Лагранжа», или «лагранжиан» [2, 3]:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) = T - U,$$

где L – функция Лагранжа; $\frac{m}{2} \dot{x}^2 = T$ – кинетическая энергия системы; $U(x)$ – потенциал (потенциальная энергия).

Потенциальная и кинетическая энергии содержат в себе информацию о динамике сложных механических систем. Таким образом, формализм Лагранжа представляет собой универсальное методически обобщенное средство, позволяющее описывать различные физические системы на одинаковом методическом уровне. Использование уравнений баланса позволяет определить такие универсальные физические величины, как энергия, работа, импульс. А вся информация о процессах в системе содержится в одной скалярной функции – лагранжиане $L(q, \dot{q}, t)$, который, в свою очередь, зависит от обобщенных координат системы

$$q = \{q^i, i = 1, \dots, f\}$$

и обобщенных скоростей

$$\dot{q} = \{\dot{q}^i, i = 1, \dots, f\}$$

и является индивидуальной структурой, входящей в формализм Лагранжа [4].

Лагранжиан представляет собой интегральное ядро принципа наименьшего действия Гамильтона:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \text{ @ extremum,}$$

из которого вытекает система уравнений Эйлера–Лагранжа при отсутствии внешних непотенциальных сил

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \frac{1}{4}, f,$$

которые и являются фундаментальными уравнениями движения системы.

Формализм Лагранжа для диссипативных систем

Рассмотрим формализм Лагранжа для диссипативных систем.

Идея состоит в обобщении уравнения, описывающего работу силы

$$dA = F \times dl,$$

где dA – элементарная работа; F – сила, для которой вычисляется элементарная работа; dl – элементарное перемещение.

Смысл обобщения состоит в замене перемещения dl , вдоль которого действует сила F , на обобщенную координату dq , характеризующую пространственную напряженность (перемещение dl , объем dV , массу, заряд, энтропию dS и др.), а вместо F используем обобщенную силу Q , иллюстрирующую характер напряженности, такую, что

$$A = \oint Q(q) dq.$$

Везде в результате действия обобщенной силы происходит преобразование энергии:

- потенциальной $Q^i = - \frac{\partial U}{\partial q^i}$;
- кинетической $Q^i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$.

При отсутствии внешних сил получим равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0. \quad (1)$$

При внешних непотенциальных силах уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial U}{\partial q^i} = Q^i_{\text{внеш. непотенц.}}$$

$$L_{\text{терм}} = -cT - \frac{1}{\omega} \oint cT \mathbb{T}_l (\varphi - \varphi_0(T)) + (-\lambda \tilde{N}T) \tilde{N}(\varphi - \varphi_0(T)) + \mathbb{T}_l G(T) \dot{\varphi}.$$

где c – удельная теплота (предполагается $c = \text{const}$); ω – частота, в дальнейшем выпадает из уравнений; $\varphi_0(T) = \Theta / (2T)$, Θ – константа, имеющая размерность температуры; λ – коэффициент теплопроводности; $G(T)$ – функция энтропии.

Как показывают исследования [1], диссипация, связанная с внешними непотенциальными силами, может входить в формализм Лагранжа, а силы трения могут быть учтены путем введения переменной переноса.

Диссипативные свойства системы проявляются в передаче энергии от ее нетепловых степеней свободы к тепловым. Смоделируем трение в рамках формализма Лагранжа, используя термодинамику необратимых процессов. Для этого обобщим принцип Гамильтона на полевую теорию. Представим совокупность фундаментальных полей пространственно-временных переменных системы в виде функции

$$\psi = \{\psi^i, i = 1, \frac{1}{4}, f\}.$$

Процессы $\psi = \psi(x, t)$ в системе в интервале времени $[t_1, t_2]$ в заданном объеме V должны удовлетворять принципу наименьшего действия Гамильтона:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(\psi, \mathbb{T}\psi, x, t) dV dt = \text{extremum}.$$

Лагранжиан $L(\psi, \mathbb{T}\psi, x, t)$ представляет собой функцию фундаментальных полей и их первых производных по пространственным и временным координатам: $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}_l, \tilde{N}\}$, где $\mathbb{T}_l = \frac{\partial}{\partial t}$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \mathbb{T}_l(\mathbb{T}_l \psi)} + \tilde{N} \frac{\partial L}{\partial \tilde{N}(\tilde{N} \psi)} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad i = 1, \frac{1}{4}, f.$$

В лагранжевом формализме явление теплопроводности описывается комплексной фундаментальной тепловой переменной

$$\psi(x, t) = \sqrt{T(x, t)} \exp(i\varphi(x, t)),$$

где $T(x, t) = \psi(x, t)^* \psi(x, t) \geq 0$ – абсолютная температура (характеризует тепловое поле); $\psi(x, t)^*$ и $\psi(x, t)$ – комплексно-сопряженные функции; $\varphi(x, t)$ – тепловая фаза.

Лагранжиан теплопереноса представим через действительные переменные

В случае использования идеального материала с нулевой теплопроводностью $\lambda = 0$ лагранжиан принимает вид

$$L_{\text{терм}} = -cT - \frac{1}{\omega} \oint cT \mathbb{T}_l (\varphi - \varphi_0(T)) \dot{\varphi}. \quad (2)$$

$$\delta\varphi: \frac{d}{dt}(cT) - \mu k^2 = 0; \quad (8)$$

$$\delta T: c \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (\varphi - \varphi_0(T)) \right) \dot{\varphi} = 0; \quad (9)$$

$$\delta\Phi: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + U(x) \ddot{x} + \mu k^2 = 0.$$

Решения для уравнений (7)–(9) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= -\omega t - \frac{\mu}{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - e^{-\frac{\mu}{m} t} \ddot{x}; \\ x(t) &= v_0 \frac{\mu}{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - e^{-\frac{\mu}{m} t} \ddot{x}; \\ T(t) &= T_0 + \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - e^{-\frac{2\mu}{m} t} \ddot{x} \end{aligned} \quad (10)$$

где v – скорость.

Продифференцировав уравнение (10), получим уравнение для скорости движения материальной точки под действием трения Стокса:

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 \frac{\mu}{m^2} e^{-\frac{\mu}{m} t}.$$

Трение Кулона. Динамика материальной точки в одномерном случае описывается лагранжианом

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \ddot{x} + \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - cT \left(1 + \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (\varphi - \varphi_0(T)) \right) \dot{\varphi} + \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + U(x) \ddot{x} + (\Phi - (\varphi - \varphi_0(T))) (-\mu |k|) \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$\delta x: \frac{d}{dt} \left(m \dot{x} \right) - \frac{1}{\omega} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{dU}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = 0;$$

$$\delta\varphi: \frac{d}{dt}(cT) - \mu |k| = 0;$$

$$\delta T: c \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (\varphi - \varphi_0(T)) \right) \dot{\varphi} = 0;$$

$$\delta\Phi: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + U(x) \ddot{x} + \mu |k| = 0.$$

В частном случае, при $U(x) = 0$ и начальных условиях $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$, $T(t_0) = T_0$, при $t_0 = 0$, получим следующие решения [4]:

$$x(t) = \frac{\mu}{m} t \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\mu}{m} t \ddot{x} \quad (11)$$

$$T(t) = T_0 + \frac{\mu}{c} t \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\mu}{2m} t \ddot{x}$$

Продифференцировав уравнение (11), получим уравнение для скорости движения материальной точки под действием трения Кулона:

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 - 2 \frac{\mu}{m} t. \quad (12)$$

Результаты моделирования

Проведем анализ полученных уравнений, построив графики зависимостей $x(t)$, $v(t)$, $T(t)$ с помощью программного пакета MathCad.

Для этого зададим параметры системы:

$$\mu = 0,001; m = 0,1 \text{ кг}; v_0 = 10 \text{ м/с}; t = 0, 500 \text{ с}; \\ T_0 = 273 \text{ К}; c = 200 \text{ Дж/ (кг} \cdot \text{K)}.$$

Время прекращения движения $\tau = \frac{mv_0}{\mu}$.

На рис. 1 представлен скриншот, иллюстрирующий применение пакета MathCad при расчетах зависимостей $x(t)$, $v(t)$, $T(t)$ при использовании мо-

делей с трением Стокса (на скриншоте обозначены $x(t)$, $V(t)$, $T(t)$) и моделей с трением Кулона (на скриншоте обозначены $x1(t)$, $V1(t)$, $T1(t)$).

$$\begin{aligned} &\mu := 0.001 \quad m := 0.1 \quad V0 := 10 \quad t := 0..500 \\ &T0 := 273 \quad c := 200 \\ \text{трение Стокса:} \quad &x(t) := V0 \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{\mu}{m}}\right) \quad T(t) := T0 + \frac{m}{2 \cdot c} \cdot (V0)^2 \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{2\mu}{m}}\right) \\ &V(t) := V0 \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot e^{-t \cdot \frac{\mu}{m}} \\ \text{трение Кулона} \quad &x1(t) := t \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right) \cdot \left(\frac{m \cdot V0}{\mu} - t\right) \quad T1(t) := T0 + \frac{t \cdot \mu}{c} \cdot \left(V0 - \frac{\mu \cdot t}{2m}\right) \\ &V1(t) := V0 - 2 \cdot \frac{\mu \cdot t}{m} \end{aligned}$$

Рис. 1. Скриншот применения пакета MathCad при расчетах

Fig. 1. Screenshot of the use of the MathCad package in calculations

Проведем сравнительный анализ решений, полученных классическим методом согласно Ньютонской механике и с использованием формализма Лагранжа для диссипативных систем.

Анализ моделей с трением Кулона. Из анализа уравнения (11) следует, что оно однозначно опи-

сывает движение тела под действием кулоновского трения.

Графики зависимости координаты и скорости от времени, полученные в MathCad согласно уравнениям (11) и (12) представлены на рис. 2.

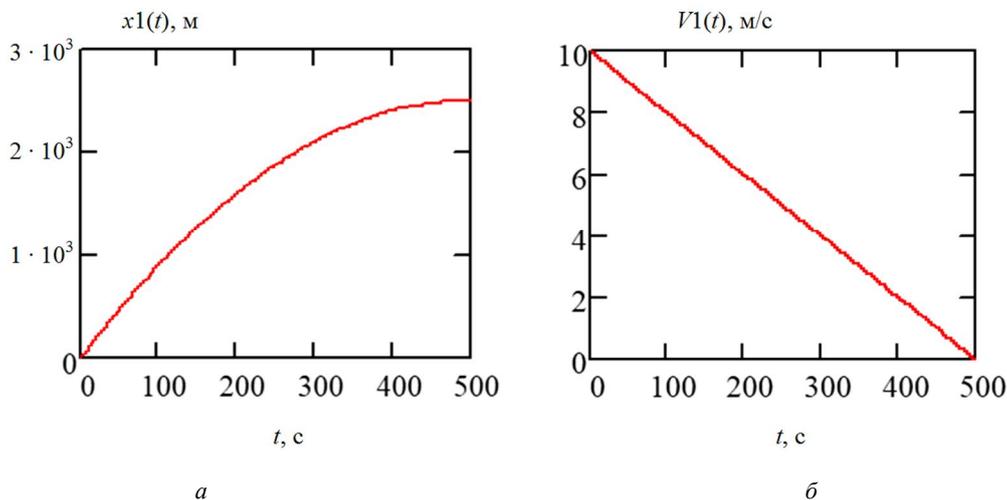


Рис. 2. Графики зависимости координаты (а) и скорости (б) от времени при использовании модели трения Кулона в интервале 0–500 с

Fig. 2. Graphs of dependence of a coordinate (a) and speed (b) on time when using the Coulomb friction model in the time interval 0-500 s

Для классической кулоновской силы трения уравнения зависимости координаты и скорости от времени для равноускоренного движения имеют вид [5]

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad (13)$$

и

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 - at, \quad (14)$$

где $a = 2 \frac{\mu}{m}$ – ускорение.

Проведя замену $2 \frac{\mu}{m}$ на ускорение a в уравнениях (11) и (12), получим уравнения (13) и (14), отвечающие равнозамедленному движению и согласующиеся с графиками на рис. 2, что подтвер-

ждает справедливость возможности использования формализма Лагранжа для диссипативных систем.

Выбор интервала времени от 0 до 500 обусловлен остановкой тела при $v(500) = 0$.

Увеличение интервала времени приводит, как и ожидается, к смене знака скорости и уменьшению координаты (рис. 3), что теоретически оправдано при переходе выделявшейся при трении тепловой энергии в кинетическую.

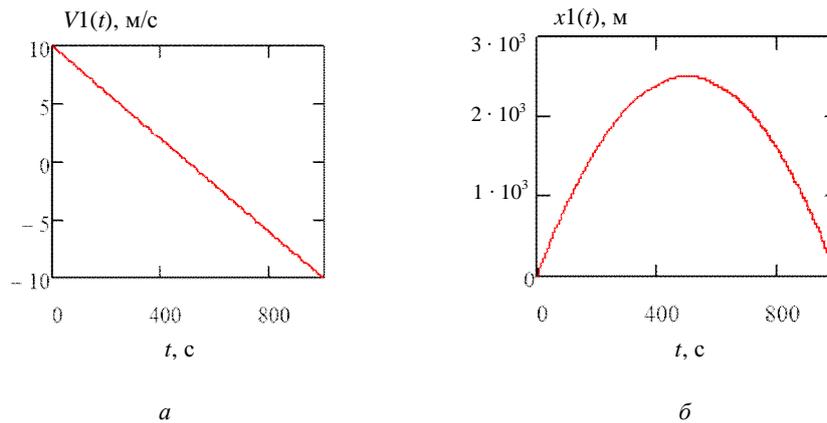


Рис. 3. Графики зависимости скорости (а) и координаты (б) от времени при использовании модели трения Кулона в интервале 0–1 000 с

Fig. 3. Graphs of dependence of speed (a) and a coordinate (b) on time when using the Coulomb friction model in the time interval 0-1.000 s

В реальной ситуации такое происходит не может, т. к. энергия расходуется на работу диссипативных сил, поэтому необходимо с осторожностью подходить к моделированию, определяя интервал времени, при котором уравнения дают адекватный результат.

График зависимости температуры тела от времени (рис. 4) демонстрирует повышение температуры тела в результате трения, что не противоречит физическим законам.

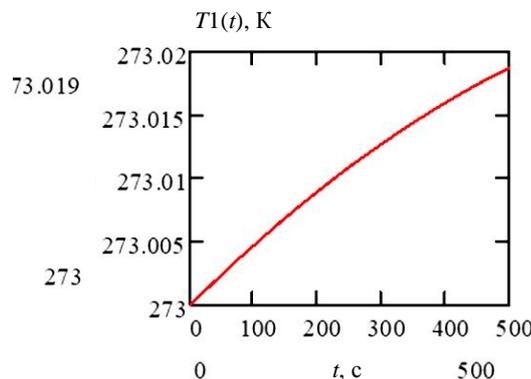


Рис. 4. График зависимости температуры тела с трением Кулона от времени

Fig. 4. Graphs of dependence of body temperature with Coulomb friction on time

Анализ моделей с трением Стокса. Как известно, вязкое трение зависит от скорости движения тела ($R = -\mu\dot{x}$). С уменьшением скорости трение уменьшается. Данный факт подтверждается

представленными на рис. 5 графиками зависимости координаты и скорости от времени для вязкого трения.

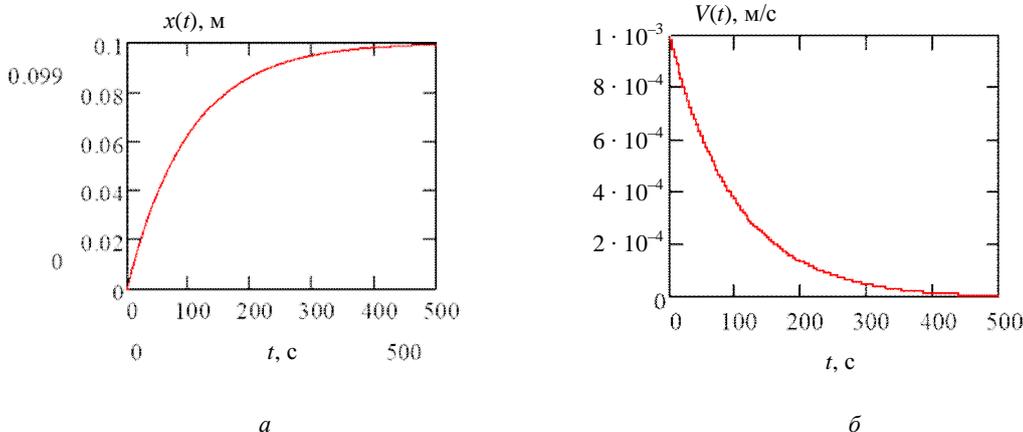


Рис. 5. Графики зависимости координаты (а) и скорости (б) от времени при использовании модели трения

Fig. 5. Graphs of a coordinate (a) and velocity (b) on time when using a friction model

Анализируя графики на рис. 5, можно прийти к выводу, что при наличии вязкого трения характер движения оказывается более сложным, чем при трении Кулона. Движение происходит не просто с замедлением, но и с переменным ускорением, что следует из графика 5, б, а значит, требует для описания в классической форме более сложных зависимостей, нежели зависимости (13) и (14).

Заключение

В работе показана возможность обобщения формализма Лагранжа на задачи с трением для диссипативных систем. Предложены математические модели, описывающие динамические процессы в гетерогенных структурах с трением. Результаты моделирования подтверждают схожесть полученных моделей на основе формализма Лагранжа с моделями на основе классической ньютоновской механики.

Рассмотренные модели, характеризующие диссипативные свойства тел в формализме Лагранжа, являются упрощенными и нуждаются в совершенствовании. В реальной ситуации движение происходит при соприкосновении тел, имеющих конечные размеры, у которых тепло распределяется определенным образом между обоими телами.

Кроме того, теплопередача происходит по поверхности тел, а не по всему объему, что требует корректировки полученных моделей. Однако задача заключалась не в строгом описании моделей механических систем с диссипацией, а в демонстрации возможности учета диссипации в формализме Лагранжа. Этот формализм позволяет получить унифицированную структуру для любых технических систем и на основе вариационного принципа Гамильтона получать приближенные решения динамических систем с использованием известных пакетов программ.

Список источников

1. Шарголт М. Трение в деформируемых средах. Подход на основе полевой теории к термодинамике диссипативных процессов в рамках формализма Лагранжа // Физическая мезомеханика. Томск: Ин-т физики прочности и материаловедения Сиб. отд. РАН, 2001. № 4. С. 47–57.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. М.: Физматлит, 2007. Т. 1. Механика. 224 с.
3. Макаров П. А. О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем //

- Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2 (23). С. 46–59.
4. Антони К.-Х. Термодинамика процесса трения и лагранжев формализм: вклад в мезоскопический подход в теории пластичности // Физическая мезомеханика. Томск: Ин-т физики прочности и материаловедения Сиб. отд. РАН, 2001. № 4. С. 33–46.
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. М.: Физматлит, 2020. Т. 1. Механика. 560 с.

References

1. Shargott M. Trenie v deformiruemykh sredakh. Podkhod na osnove polevoi teorii k ter-modinamike dissipa-

- tivnykh protsessov v ramkakh formalizma Lagranzha [Friction in deformable media. Field theory approach to ther-

modynamics of dissipative processes in terms of Lagrange formalism]. *Fizicheskaya mezomekhanika*. Tomsk, In-t fiziki prochnosti i materialovedeniia Sib. otd. RAN, 2001. No. 4. Pp. 47-57.

2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie: v 10 tomakh* [Theoretical physics: textbook: in 10 volumes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. Vol. 1. Mekhanika. 224 p.

3. Makarov P. A. O variatsionnykh printsipakh mekhaniki konservativnykh i nekonservativnykh sistem [On variational principles of mechanics of conservative and non-conservative systems]. *Vestnik Syktyvkar'skogo universi-*

teta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2017, no. 2 (23), pp. 46-59.

4. Antoni K.-Kh. Termodinamika protsessa treniia i lagranzhev formalizm: vklad v mezoskopicheskii podkhod v teorii plastichnosti [Thermodynamics of friction process and Lagrangian formalism: contributions to mesoscopic approach in theory of plasticity]. *Fizicheskaya mezomekhanika*. Tomsk, In-t fiziki prochnosti i materialovedeniia Sib. otd. RAN, 2001. No. 4. Pp. 33-46.

5. Sivukhin D. V. *Obshchii kurs fiziki: uchebnoe posobie: v 5 tomakh* [General course of physics: textbook: in 5 volumes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2020. Vol. 1. Mekhanika. 560 p.

Статья поступила в редакцию 06.01.2022; одобрена после рецензирования 10.03.2022; принята к публикации 08.04.2022
The article is submitted 06.01.2022; approved after reviewing 10.03.2022; accepted for publication 08.04.2022

Информация об авторах / Information about the authors

Михаил Иванович Вольников – кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры автоматизации и управления; Пензенский государственный технологический университет; vmi1972@yandex.ru

Mikhail I. Vol'nikov – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department of Automation and Control; Penza State Technological University; vmi1972@yandex.ru

Владимир Васильевич Смогунов – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры теоретической и прикладной механики и графики; Пензенский государственный университет; pnzgu.tpmg@mail.ru

Vladimir V. Smogunov – Doctor of Technical Sciences, Professor; Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics and Graphics; Penza State University; pnzgu.tpmg@mail.ru

