УПРАВЛЕНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, АВТОМАТИЗАЦИЯ

MANAGEMENT, MODELING, AUTOMATION

Научная статья
УДК 62.752, 621.534, 833.888.6, 629.4.015, 517.71-74
https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-1-7-15

Системные подходы в оценке динамических состояний механических колебательных систем: технология структурных преобразований

Андрей Владимирович Елисеев[1]✉, *Артем Сергеевич Миронов*[2], *Сергей Викторович Елисеев*[3]

[1-3]*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия, eavsh@ya.ru*✉

Аннотация. Развивается научно-методологическая база в направлении системного анализа и теории систем в приложении к задачам оценки динамических состояний технических объектов, расчетные схемы которых представляются механическими колебательными системами с одной и более степенями свободы. В рамках предлагаемого подхода с механической колебательной системой сопоставляется эквивалентная (в динамическом отношении) структурная схема системы автоматического управления. На основе представлений об объектах, динамические свойства которых оцениваются, внешних силовых и кинематических воздействиях, типовых элементарных звеньях, обратных отрицательных связях, передаточных функциях и динамических режимах механических колебательных систем предложена новая методика с учетом устройств преобразования движений. На основе развиваемого подхода получены новые данные об особенностях динамических свойств систем, включающих в свой состав звенья, обладающие приведенными упругими характеристиками. Рассмотрены возможности создания в механических колебательных системах ряда новых динамических эффектов, отражающих специфику вибрационных взаимодействий элементов колебательных структур.

Ключевые слова: механическая колебательная система, структурная схема, жесткость, передаточные функции, обратные связи, динамическое гашение

Для цитирования: *Елисеев А. В., Миронов А. С., Елисеев С. В.* Системные подходы в оценке динамических состояний механических колебательных систем: технология структурных преобразований // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 1. С. 7–15. https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-1-7-15.

Original article

System approaches in assessing mechanical oscillatory system dynamics: technology of structural transformations

Andrey V. Eliseev[1]✉, *Artem S. Mironov*[2], *Sergey V. Eliseev*[3]

[1-3]*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia, eavsh@ya.ru*

Abstract. A scientific and methodological base is being developed in the direction of systems analysis and systems theory as applied to the problems of assessing the dynamic states of technical objects, the design schemes of which are represented by mechanical oscillatory systems with one or more degrees of freedom. Within the framework of the proposed approach, a mechanical oscillatory system is compared with a dynamically equivalent structural diagram of an automatic control system. Based on the concepts of objects, whose dynamic properties are estimated, on the external force and kinematic influences, typical elementary links, negative feedbacks, transfer functions and dynamic modes of mechanical oscillatory systems, a new technique is proposed, taking into account the motion transformation devices. On the basis of the developed approach there are obtained the new data on the dynamic properties of systems that include links with reduced elastic characteristics. The possibilities of creating a number of new dynamic effects in mechanical oscillatory systems reflecting the specificity of the vibration interaction of the elements of oscillatory structures are considered.

Keywords: mechanical oscillatory system, structural diagram, stiffness, transfer functions, feedbacks, dynamic damping

For citation: Eliseev A. V., Mironov A. S., Eliseev S. V. System approaches in assessing mechanical oscillatory system dynamics: technology of structural transformations. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2022;1:7-15. (In Russ.) https://doi.org/10.24143/2073-5529-2022-1-7-15.

Введение

Технология построения структурных математических моделей для систем с одной степенью свободы подразумевает, что структурной схеме для решения задачи оценки динамического состояния выделяется объект, который характеризуется массой *m*, если рассматривается поступательное колебательное движение, или моментом инерции *J*, если твердое тело совершает малые угловые колебания относительно некоторой неподвижной точки. В задаче оценки динамических свойств массоинерционный объект рассматривается как основное звено с передаточной функцией интегрирующего элемента второго порядка [1–3].

Массоинерционный элемент является основой формирования структурной модели, включающей в свой состав дополнительно типовые звенья, в качестве которых выступают упругие звенья, демпферы вязкого трения и устройства для преобразования движения в виде механизмов, обладающих передаточными функциями дифференцирующего звена второго порядка.

Все названные элементы, кроме объекта защиты, относятся к числу типовых элементов и создают относительно объекта соответствующие обратные отрицательные связи. Наличие упругой обратной связи обеспечивает проявление колебательных форм движения объекта (при выводе его из состояния равновесия или приложении периодических сил внешнего воздействия). Структурная схема строится с учетом того, что объект (интегрирующее звено второго порядка) имеет первую основную точку, где «собираются» все обратные связи и прикладываются все внешние силы («т. 1» на рис. 1, *б*).

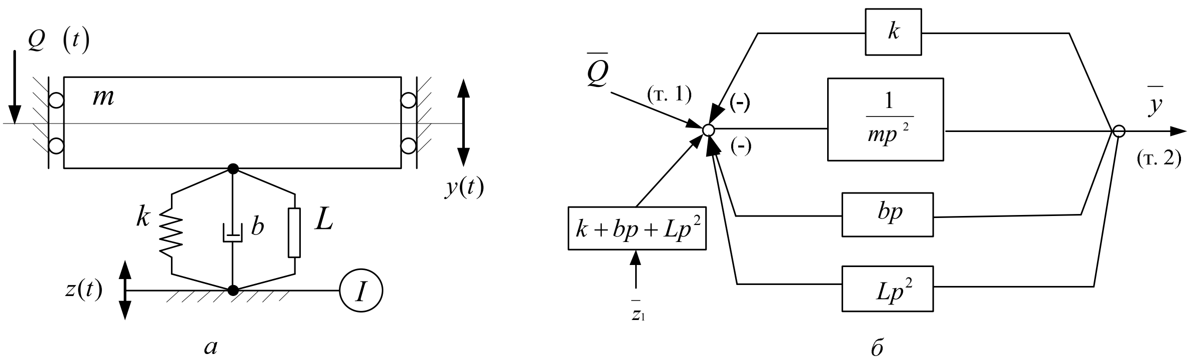


Рис. 1. Механическая колебательная система с одной степенью свободы: расчетная схема (*а*), структурная схема (*б*): *Q*(*t*) – внешнее силовое воздействие; *z*(*t*) – внешнее кинематическое воздействие; *k* – жесткость линейного упругого элемента; *b* – коэффициент вязкого трения; *L* – массоинерционная характеристика; *y*(*t*) – смещение; $p = j\omega$ – комплексная переменная; символ «–» над переменной означает изображение по Лапласу; *m* – масса; *I* – опорная поверхность; $\bar{Q}$ – силовое возмущение; т. 1 – входная точка; т. 2 – выходная точка

Fig. 1. Mechanical oscillatory system with one degree of freedom: design scheme (*a*), structural diagram (*б*): *Q* (*t*) – external force action; *z* (*t*) – external kinematic action; *k* – stiffness of a linear elastic element; *b* – coefficient of viscous friction; *L* – mass-inertial characteristic; *y*(*t*) – displacement; $p = j\omega$ – complex variable; symbol "–" above the variable means the Laplace image; *m* – mass; *I* – support surface; $\bar{Q}$ – force disturbance; т. 1 – input point; т. 2 – output point

Вторая основная точка – это выход из интегрирующего звена; выход этого звена имеет размерность смещения (координата движения, «т. 2» на рис. 1, *б*). На рис. 1 представлена механическая колебательная система. При построении структурной математической модели используется уравнение Лагранжа 2-го рода и формализм интегральных преобразований Лапласа [3]. На рис. 1, *а* $Q(t)$ и $z(t)$ – внешние силовое и кинематическое воздействия соответственно; на рис. 1, *б* в т. 1 представлен суммирующий элемент, выявляющий разность $\bar{Q} + (Lp^2 + bp + k)\bar{z} - (Lp^2 + bp + k)\bar{y}$, где $\bar{Q}$ рассматривается как входная величина, в т. 2 указано смещение $\bar{y}$, рассматриваемое как выходная величина.

Используя структурную схему, можно получить передаточную функцию системы:

– при $Q(t) \neq 0$, $z(t) = 0$:

$$W_1(p) = \bar{y}/\bar{Q} = 1/\left((m+L)p^2 + bp + k\right); \quad (1)$$

– при $Q(t) = 0$, $z(t) \neq 0$:

$$W_2(p) = \bar{y}/\bar{z} = \left(Lp^2 + bp + k\right)/\left((m+L)p^2 + bp + k\right). \quad (2)$$

Из передаточных функций (1), (2) могут быть найдены частоты резонансных режимов, которые «обнуляют» знаменатель выражений. Из выражения (2) следует, в частности, что при $Q(t) = 0$ и $b = 0$ в системе при кинематическом возмущении на частоте $\omega^2_{\text{dyn}} = k/(m+L)$ возможны проявления режимов динамического гашения колебаний.

Появление таких эффектов объясняется действием дополнительных связей ($L \neq 0$), возникающих путем введения в механическую колебательную устройства для преобразования движений.

Необходимо отметить, что в системах с одной степенью свободы режим динамического гашения колебаний возникает при кинематическом возмущении; более подробно вопросы, связанные с учетом особенностей механических систем и способов их вибрационного нагружения, рассмотрены в [3].

Целью предлагаемого исследования является разработка подходов в рамках методов структурного математического моделирования к решению задач динамики механических колебательных систем с двумя степенями свободы, в которых также могут проявляться ситуации образования типовых структур, обладающих более широкими возможностями оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения, работающих в условиях вибрационных нагружений.

Выбор объекта в задаче оценки динамических состояний механических колебательных систем

Динамические взаимодействия элементов в системах с несколькими степенями свободы отличаются большим разнообразием, что побуждает к поиску особенностей в динамических взаимодействиях элементов структурных моделей.

1. В системах с одной степью свободы, как было показано, в решении задачи оценки динамического состояния объект отображается интегрирующим звеном 2-го порядка и является основой для формирования системы обратных связей, которые создаются системообразующими элементами (упругие, диссипативные элементы, устройства для преобразования движения и др.). Отметим, что формирование типовых элементарных звеньев, если имеется в виду учет особенностей их передаточных функций, может быть построено на упрощении обобщенной обратной отрицательной связи, имеющей вид дробно-рационального выражения

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 +}. \quad (3)$$

Если в (3) принять, что $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, а остальные составляющие полагать равными нулю, то $W(p) = a_0/b_0$ представляет собой динамическую характеристику линейного упругого элемента. Аналогично при $a_2 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ (если остальные $a_i = 0$, $b_i = 0$) $W(p) = a_2 p^2/b_0$ и отображает элементарное типовое звено двойного дифференцирования.

Особенностью систем с конечным числом степеней свободы является то, что при выборе одного из массоинерционных элементов в качестве объекта для оценки динамических состояний второй и остальные массоинерционные элементы становятся основой для формирования приведенной (или обобщенной) пружины.

2. Рассмотрим механическую колебательную систему с двумя степенями свободы (рис. 2).

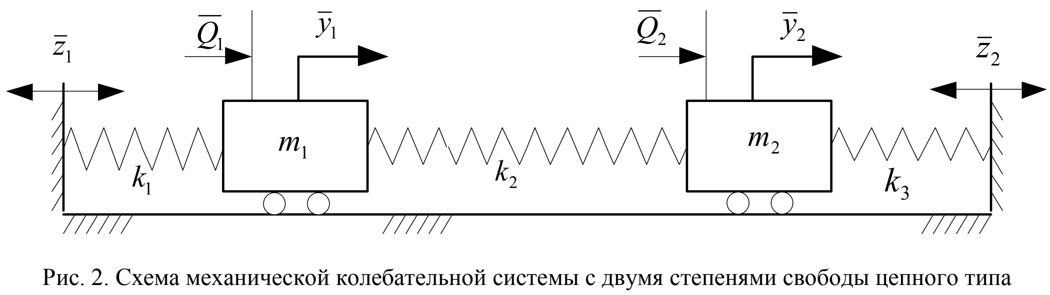


Рис. 2. Схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы цепного типа

Fig. 2. Diagram of a mechanical oscillatory system with two degrees of freedom of the chain type

На основе использования известных подходов [3] построим ее структурную схему (рис. 3).

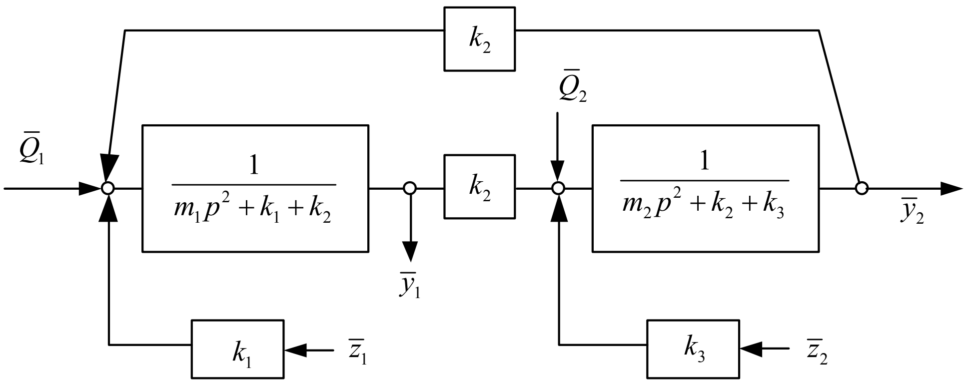


Рис. 3. Структурная схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы цепного типа

Fig. 3. Block diagram of a mechanical oscillatory system with two degrees of freedom of the chain type

Как это следует из рис. 2 и 3, система может находиться под совместным действием внешних возмущений силового и кинематического видов. Будем предполагать, что система совершает малые колебания относительно положения статического равновесия; внешние воздействия являются синфазными гармоническими (моногармоническими функциями времени). Отметим, что в качестве объекта, динамическое состояние которого оценивается, выбирается массоинерционный элемент m_1. Запишем выражения передаточной функции в частных случаях внешних воздействий.

Если $Q_1 \neq 0$, а $Q_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, то

$$W_1(p) = \bar{y}_1 / \bar{Q}_1 = \left(m_2 p^2 + k_2 + k_3\right) / A(p), \qquad (4)$$

где

$$A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 \qquad (5)$$

определяет частотное характеристическое уравнение.

Передаточная функция по координате $\bar{y}_2$ принимает вид

$$W_2(p) = \bar{y}_2 / \bar{Q}_1 = k_2 / A(p). \qquad (6)$$

Отметим, что движение системы рассматривается в координатах y_1, y_2, связанных с неподвижным базисом.

Передаточные функции (4), (6) системы содержат информацию о динамических свойствах, заданных характеристическим уравнением (5). В частности, система обладает частотой динамического гашения колебаний по координате y_1:

$$\omega^2_{1,\,\mathrm{dyn}} = \left(k_2 + k_3\right) / m_2 .$$

3. Структура системы (см. рис. 3) определяется парциальными блоками ($m_1p^2 + k_1 + k_2$) и ($m_2p^2 + k_2 + k_3$), соединенными между собой упругой связью k_2.

Наличие парциальных систем предопределяет наличие двух частот колебаний, называемых парциальными:

$$\omega^2_{1,\mathrm{par}} = \left(k_1 + k_2\right) / m_1 ;$$

$$\omega^2_{2,\mathrm{par}} = \left(k_2 + k_3\right) / m_2 .$$

Парциальные частоты совпадают с частотами динамического гашения ($\omega^2_{i,\mathrm{dyn}} = \omega^2_{2,\mathrm{par}}$).

Характерным для рассматриваемого случая является то, что при действии возмущения частота динамического гашения колебаний по координате $\bar{y}_1$ совпадает с парциальной частотой блока ($m_2p^2 + k_2 + k_3$), что отражает специфику динамического взаимодействия элементов при действии одиночного возмущения $Q_1 \neq 0$.

Для случая $Q_2 \neq 0$ ($Q_1 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$) передаточная функция системы по рис. 3 имеет вид

$$W_2''(p) = \bar{y}_2 / \bar{Q}_2 = \left(m_1 p^2 + k_1 + k_2\right) / A(p);$$

$$W_1''(p) = \bar{y}_1 / \bar{Q}_2 = k_2 / A(p).$$

Режим динамического гашения колебаний при действии силы $\bar{Q}_2$ проявляется только по координате $\bar{y}_2$ на частоте $\omega^2_{2,\mathrm{dyn}} = (k_1 + k_2) / m_1$, при этом $\omega^2_{2,\mathrm{dyn}} = \omega^2_{1,\mathrm{par}}$.

4. Учет совместного действия двух силовых факторов предполагает, что Q_1 и Q_2 совершают синфазное движение, а между силовыми факторами имеется связь, определенная соотношением $Q_2 = \alpha Q_1$.

Учет связности внешних силовых факторов приводит к детализации представлений об аналитической форме передаточных функций:

$$W_1''(p)=\bar{y}_1/\bar{Q}_1=\left(m_2p^2+k_3+(\alpha+1)k_2\right)/A(p);$$

$$W_2''(p)=\bar{y}_2/\bar{Q}_1=\left(\alpha m_1p^2+\alpha k_1+(\alpha+1)k_2\right)/A(p),$$

где α – коэффициент связности, принимающий произвольные вещественные значения. Частоты динамического гашения с учетом коэффициента связности определяются выражениями

$$(\omega''_{1,\text{dyn}})^2=\frac{k_3}{m_2}+\frac{k_2}{m_2}\alpha;\ (\omega''_{2,\text{dyn}})^2=\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}\frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, коэффициент связности α является существенным фактором, определяющим особенности режимов движения механической колебательной системы с двумя степенями свободы цепного типа (см. рис. 2).

Если в качестве входного воздействия рассматриваются кинематические возмущения опорной поверхности $z_1 \neq 0$ ($z_2 = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$), то динамические особенности определяются согласно выражениям передаточных функций

$$W_1'''(p)=\bar{y}_1/\bar{z}_1=\left(k_1m_2p^2+k_1k_2+k_1k_3\right)/A(p);$$

$$W_2'''(p)=\bar{y}_2/\bar{z}_1=\left(k_1k_2\right)/A(p).$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи кинематического возмущения при $z_2 \neq 0$, $z_1 = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, а также случаи совместного действия кинематического возмущения при наличии связности возмущений $z_2 = \beta z_1$, где β – коэффициент связности.

Действия внешних силовых возмущений связаны с рассмотрением зависимости податливостей в движениях массоинерционных элементов от частоты внешних возмущений силовой и кинематической природы. В случае действия кинематического возмущения физический смысл передаточной функции заключается в проявлениях связности движений по координатам y_1, y_2; такая связанность движения отображает рычажные связи между кинематическими параметрами. В работе [3] рассматриваются возможности формирования динамических состояний на основе использования эффектов связности внешних воздействий. Совместное действие факторов силовых и кинематических воздействий может быть исследовано в рамках рассмотренных выше подходов, однако это требует учета специфики физической сути каждого из возмущений.

О свойствах частотного уравнения

Частотное характеристическое уравнение $A(p) = 0$ в развернутом виде представляет собой биквадратное уравнение относительно комплексной переменной $p = j\omega$ и имеет вид

$$m_1m_2p^4+p^2(m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2))+$$
$$+(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2=0.$$

Введем обозначения n_1, n_2 для парциальных частот $\omega_{1,\text{par}}$, $\omega_{2,\text{par}}$:

$$(\omega_{1,\text{par}})^2=n_1^2=\frac{k_1+k_2}{m_1};$$

$$(\omega_{2,\text{par}})^2=n_2^2=\frac{k_2+k_3}{m_2}.$$

1. После ряда преобразований частотное характеристическое уравнение можно представить в виде

$$p^4+p^2\,[n_1^2+n_2^2]+n_1^2n_2^2-(k_2/m_1)(k_2/m_2)=0, \quad (7)$$

где n_1, n_2 – парциальные частоты. Характеристическое уравнение (7) открывает возможности новых подходов в оценке физических свойств механических колебательных систем; в данном случае характеристическое уравнение можно трактовать, имея ввиду физический смысл, не только как сумму всех действующих сил, удовлетворяющих принципу Даламбера, но и с позиций соотношения кинетической и потенциальной энергий во взаимодействиях элементов систем.

Корни уравнения (7) являются частотами собственных колебаний системы и определяются выражениями

$$(p_{1,2})^2=-\frac{n_1^2+n_2^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2}\right)^2-n_1^2n_2^2+\frac{k_2^2}{m_1m_2}}=$$
$$=-\frac{n_1^2+n_2^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{n_1^2-n_2^2}{2}\right)^2+\frac{k_2^2}{m_1m_2}}. \quad (8)$$

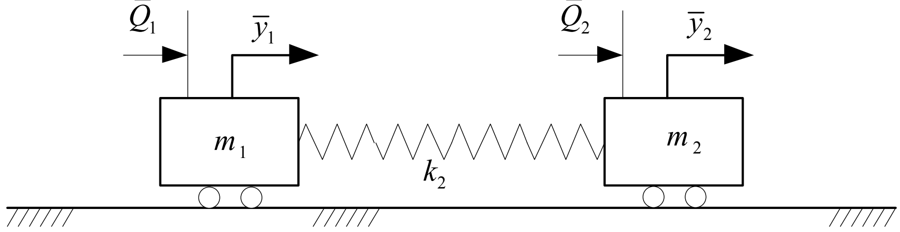
Из (8), в частности, следует, что сумма квадратов частот собственных колебаний системы равна сумме парциальных частот; разность квадратов частот собственных колебаний равна выражению

$$A=\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+\frac{4k_2^2}{m_1m_2}}.$$

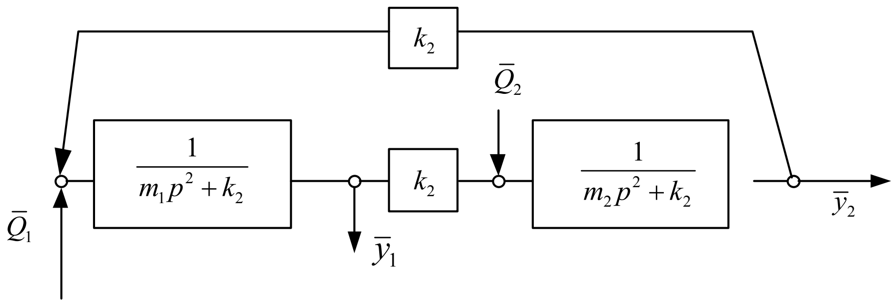
Отметим, что

$$n_1^2+n_2^2=\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2+k_3}{m_2}=\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}+$$
$$+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_3}{m_2}=\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{k_3}{m_2}. \quad (9)$$

В выражении (9) $\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1m_2}=k_2/m_{pr}=\omega_d^2$ определяет частоту собственных колебаний диады (как отношение жесткости к приведенной массе), которая является специфическим структурным образованием механической колебательной системы, более сложной системы, приведенной на рис. 2 и 3. На рис. 4 представлена диада.



а



б

Рис. 4. Диада: расчетная схема (*а*), структурная схема (*б*)

Fig. 4. Dyad: design diagram (*а*), structural diagram (*б*)

Из рис. 4 следует, что диада является специфическим структурным образованием, обладающим частотой собственных колебаний:

$$\omega^2_{\text{eig, d}} = \left(k_2(m_1+m_2)\right)/(m_1m_2) .$$

Что касается механических образований с частотами $n^2_{10} = k_1/m_1$; $n^2_{20} = k_3/m_2$, то они определяют взаимодействие диады с опорными поверхностями.

Из вышеприведенного следует, что сумма квадратов частот собственных колебаний равняется сумме квадратов частот собственных колебаний диады ($\omega^2_{\text{eig, d}}$) и квадратов частот n^2_{10} и n^2_{20}, определяющих взаимодействие диады с опорными поверхностями. Подробная информация о свойствах диад как специфических структурных образований в составе механических колебательных систем приводится в работе [4].

2. Структура частотного характеристического уравнения может быть представлена также в виде

$$(m_1p^2+k_1+k_2) - \frac{k_2{}^2}{(m_2p^2+k_2+k_3)} = 0 . \qquad (10)$$

Выражение (10) может быть преобразовано к виду

$$m_1p^2+k_1+\frac{k_2(m_2p^2+k_3)}{m_2p^2+k_2+k_3} = 0 . \qquad (11)$$

В уравнении (11) блок из элементарных типовых звеньев представляет собой обобщенную пружину (квазипружину) с приведенной жесткостью

$$k_{pr} = \frac{k_2m_2p^2+k_2k_3}{m_2p^2+k_2+k_3}. \qquad (12)$$

Особенность такой обобщенной пружины заключается в том, что жесткость такого элемента зависит от частоты: при частоте $(\omega_{pr,1})^2 = k_3/m_2$ приведенная жесткость обнуляется, а при частоте

$$(\omega_{pr,2})^2 = \left(k_2+k_3\right)/m_2 \qquad (13)$$

приведенная жесткость становится бесконечно большой. На рис. 5 приведены расчетная схема и структурная математическая модель системы (см. рис. 2, $Q_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$).

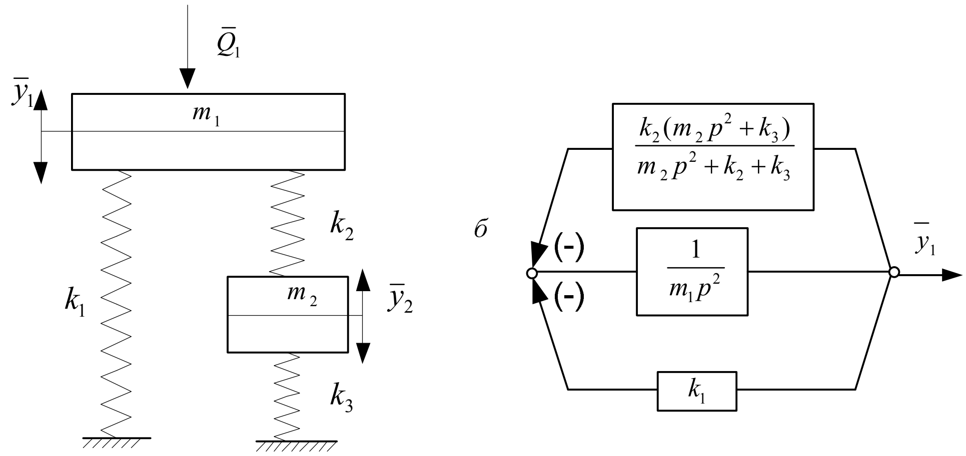


Рис. 5. Механическая колебательная система с двумя степенями свободы при введении обобщенной пружины с приведенной жесткостью k_{pr} (12): расчетная схема (*а*), структурная схема (*б*)

Fig. 5. Mechanical oscillatory system with two degrees of freedom with introducing a generalized spring with reduced stiffness k_{pr} (12): design diagram (*a*), structural diagram (*б*)

При суммировании действий двух ветвей обратной отрицательной связи структурная схема может быть преобразована к структурной схеме системы с одной степенью свободы (рис. 6), приведенная жесткость которой при действии внешнего возмущения Q_1 имеет вид

$$k_{pr,inv} = \frac{m_2 p^2 (k_1 + k_2) + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \qquad (14)$$

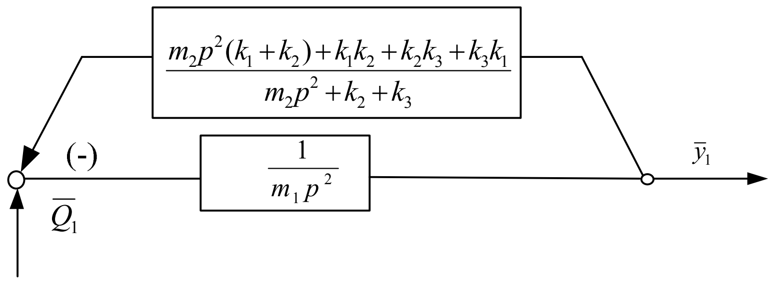


Рис. 6. Структурная модель механической колебательной системы с выделенным объектом с координатой y_1

Fig. 6. Structural model of a mechanical oscillatory system with a selected object with y_1 coordinate

Если обратная отрицательная связь при частоте $\omega^2 = k_2 + k_3 / m_2$ приобретает бесконечно большое значение за счет обнуления знаменателя передаточной функции (14), то в системе проявляется режим динамического гашения колебаний.

При обнулении знаменателя передаточной функции обратной связи координата $\bar{y}_1$ принимает нулевое значение. При остановке движения по координате $\bar{y}_1$ движение по координате y_2 принимает вполне определенное значение, определяемое из передаточной функции $W_2(p) = \bar{y}_2 / \bar{Q}_1$ при подстановке в нее значения частоты динамического гашения.

Вместе с тем возможна ситуация обнуления числителя передаточной функции цепи отрицательной обратной связи на частоте

$$\omega^2_{sp} = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_2 (k_1 + k_2)}. \qquad (15)$$

Под действием внешней силы Q_1 на частоте (15) объект движется по гармоническому закону относительно положения статического равновесия. Такой режим можно назвать особым (ω^2_{sp}).

Представленные подходы в решении задач динамики раскрывают возможности рассмотрения механических колебательных систем с двумя и более степенями свободы (при наличии объекта, техническое состояние которого оценивается) как систем с одной степенью свободы, но с учетом формирования определенных структурных образований, обладающих «приведенной жесткостью».

Такие обобщенные структуры могут быть названы «обобщенными пружинами», или квазиупругими элементами, их формирование осуществляется на основе использования частотного характеристического уравнения путем соответствующего преобразования с выделением объекта (элемента, относительно которого поставлена задача оценки динамических свойств). Аналогичные результаты при формировании структуры с приведением ряда динамических характеристик к выбранному объекту в некоторой системе (например, цепной системе) можно найти в работах по теории механических цепей.

Как показано на рис. 6, в результате структурных преобразований расчетная схема объекта преобразуется к структурной схеме эквивалентной (в динамическом отношении) системы автоматического управления. В рассматриваемом случае объект, динамическое состояние которого оценивается, ассоциируется с колебательными движениями массоинерционного элемента массой m_1. В рамках структурных представлений объекту соответствует интегрирующее звено 2-го порядка, имеющего цепь отрицательной обратной связи. Передаточная функция цепи обратной связи с учетом введения дополнительной связи, создаваемой упругими элементами k_2, k_3 и массоинерционным звеном m_2, представляет собой дробно-рациональное выражение (13).

Обратная связь

$$W_{\text{inv}}\left(p\right)=k_{pr}\Big/\left(m_2 p^2+k_{pr}\right)$$

обладает тем свойствам, что она принимает бесконечное значение или обнуляется.

В условиях силового возмущения, когда внешнее воздействие $Q_1(t)$ приложено к объекту m_1, частота динамического гашения соответствует парциальной частоте второго парциального блока (m_2, k_2, k_3). В этом случае координата y_1 объекта m_1 «обнуляется», но это не означает, что массоинерционное звено m_2 прекращает движение. После подстановки значения частоты динамического гашения $\omega^2_{1,dyn}$ в выражение для передаточной функции $W_2\left(p\right)=\bar{y}_2\big/\bar{Q}_1=k_2\big/A(p)$, где $A(p)$ – характеристическое частотное уравнение, получим, что при $y_1 = 0$ координата y_2 будет перемещаться в противофазе, принимая значение $\bar{y}_2=-\bar{Q}_1\big/k_2$. В этом случае обратная связь, представленная передаточной функцией, принимающей бесконечно большое значение, приводит к остановке объекта. Вместе с тем в цепи обратной связи передаточная функция может принимать нулевое значение, что проявляется на частоте, определенной выражением (14).

Упомянутое условие соотносится с «обнулением» цепи обратной связи на структурной схеме (см. рис. 4) и одновременным «обнулением» приведенной жесткости k_{pr} (14), что зависит от частоты внешнего воздействия. Выполнение таких условий создает определенные ограничения для движения объекта m_1 по координате y_1. Что касается возможности движения на этой частоте массоинерционного элемента m_2, то это может быть реализовано подстановкой чистоты ω_{sp} (14) в передаточную функцию $W_2(p)=\bar{y}_2\big/\bar{Q}_1$.

Заключение

Задачи оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, находящихся под вибрационным нагружением, характерны для многих отраслей промышленного производства и транспорта и предопределяют поиски в направлении системных подходов к разработке, с целью управления колебательными процессами, способов и средств, развиваемых с помощью структурных интерпретаций, использующих принципы динамических аналогий механических цепей и систем автоматического управления, которые имеют обратные связи.

В рамках проведенных исследований развиты научно-методологические основы системных подходов в задачах динамики цепных механических колебательных систем. Предложен метод структурных преобразований исходных расчетных схем на основе выделения понятия о «приведенных» системах. В рамках структурного подхода на примере механической колебательной системы с двумя степенями свободы показана технология построения обобщенной модели (рассматриваемой как система с одной степенью свободы).

Предложена методологическая база формирования набора типовых элементарных звеньев на основе редукции некоторой обобщенной структуры, имеющей передаточную функцию в виде дробно-рационального выражения. Показано, что элементарные звенья в реализациях системных подходов вполне соответствуют возможностям появления в упрощенных формах на основе использования частных случаев общего подхода. Предложена методологическая основа преобразования систем с конечным числом степеней свободы к системе только с одной степенью свободы (выбирается объект в виде сосредоточенной массы, обладающей координатой) путем исключения остальных координат с использованием представлений о квазиэлементах, зависящих от частоты внешних воздействий и отражающих упругие и массоинерционные связи. Для механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами с двумя степенями свободы, представляемых в виде цепных систем, разработана методика построения структурных схем. Получены новые результаты о возможностях проявления в механических колебательных системах специфических динамических режимов, отличающихся от режимов динамического гашения колебаний. Предложены инновационные подходы к формированию понятия о приведенной динамической жесткости в колебательных структурах с несколькими степенями свободы.

Структурные методы интерпретаций динамики механических колебательных систем обладают потенциалом дальнейшего развития приложений в областях вибродиагностики, робототехники, мехатроники и обладают ценностью, заключающейся в реализации целенаправленного поиска и разработке инновационных конструктивно-технических решений, связанных с широким классом смежных научно-технических направлений, включая информационные и др. технологии.

Список источников

1. *Clarence W. de Silva*. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D. C.: CRC Press, 2000. 957 p.

2. *Karnovsky I. A., Lebed E.* Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. P. 708.

3. *Eliseev S. V., Eliseev A. V.* Theory of Oscillations // Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Springer International Publishing, Cham, 2020. V. 252. 521 p.

4. *Елисеев А. В.* Системные представления в динамике колебательных структур с учетом сил вязкого трения: частотная функция и функция демпфирования. Депон. ВИНИТИ РАН, № 50-В2020 10.09.2020. 63 с.

References

1. Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D. C., CRC Press, 2000. 957 p.

2. Karnovsky I. A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. P. 708.

3. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of Oscillations. *Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control*. Springer International Publishing, Cham, 2020. Vol. 252. 521 p.

4. Eliseev A. V. *Sistemnye predstavleniia v dinamike kolebatel'nykh struktur s uchetom sil viazkogo treniia: chastotnaia funktsiia i funktsiia dempfirovaniia* [System concepts in dynamics of vibrational structures subject to forces of viscous friction: frequency function and damping function]. Depon. VINITI RAN, № 50-V2020 10.09.2020. 63 p.

Статья поступила в редакцию 15.09.2021; одобрена после рецензирования 20.12.2021; принята к публикации 30.12.2021
The article is submitted 15.09.2021; approved after reviewing 20.12.2021; accepted for publication 30.12.2021

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Владимирович Елисеев – кандидат технических наук; доцент кафедры математики; Иркутский государственный университет путей сообщения; Иркутск, ул. Чернышевского 15; eavsh@ya.ru

Andrey V. Eliseev – Candidate of Technical Sciences; Assistant Professor of the Department Mathematics; Irkutsk State Transport University; Irkutsk, Chernyshevsky street 15; eavsh@ya.ru

Артем Сергеевич Миронов – соискатель Научно-образовательного центра современных технологий, системного анализа и моделирования ИрГУПС; Иркутский государственный университет путей сообщения; Иркутск, ул. Чернышевского 15; art.s.mironov@mail.ru

Artem S. Mironov – Competitor of the Department of Scientific and Educational Center for Modern Technologies, System Analysis and Modeling of IrGUPS; Irkutsk State Transport University; Irkutsk; Chernyshevsky street 15; art.s.mironov@mail.ru

Сергей Викторович Елисеев – доктор технических наук, профессор; советник при ректорате по научной работе ИрГУПС; Иркутский государственный университет путей сообщения; Иркутск, ул. Чернышевского 15; eliseev_s@inbox.ru

Sergey V. Eliseev – Doctor of Technical Sciences, Professor; Adviser to the Rector's Office for Scientific Work of IrGUPS; Irkutsk State Transport University; Irkutsk, Chernyshevsky street 15; eliseev_s@inbox.ru