Научная статья
УДК 574.6.663.1
doi: 10.24143/1812-9498-2021-2-15-29

Математическое моделирование нестационарности биотехнологического получения молочной кислоты: устойчивость

Юлия Львовна Гордеева[1]✉, Алексей Георгиевич Бородкин[2], Елена Львовна Гордеева[3], Юрий Алексеевич Комиссаров[4]

[1] Московская государственная академия ветеринарной медицины и биотехнологии – МВА им. К. И. Скрябина, Москва, Россия, l.s.gordeev@yandex.ru✉

[2, 3, 4] Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева, Москва, Россия

Аннотация. Приведены расчетные соотношения, определяющие показатели стационарных состояний процесса получения молочной кислоты. Определены три технологии, наиболее часто упоминаемые в научных публикациях: технология использования штаммов микроорганизмов для получения биомассы (крайне редко применяемая); технология использования штаммов микроорганизмов для получения молочной кислоты с потреблением основного субстрата, чаще всего глюкозы (достаточно распространенная); технология получения молочной кислоты с использованием (помимо основного субстрата) компонента, воспроизводящего основной субстрат в процессе синтеза (перспективная технология). Для каждой технологии приведены уравнения материального баланса для стационарных и нестационарных условий, обобщенное дифференциальное уравнение для нестационарных условий, характеристическое уравнение. Приведены расчетные формулы для оценки коэффициентов дифференциальных уравнений и коэффициентов характеристического уравнения. Уравнения для нестационарных условий по двум последним технологиям базируются на использовании разложения функций в ряд Тейлора с сохранением только первых членов разложения, т. е. отклонения от стационарности в малом. Характеристическое уравнение сформировано с использованием собственных чисел λ. Рассматривается метод для всех трех технологий, позволяющий выполнить оценку устойчивости рассматриваемого стационарного состояния, – метод Гурвица. Для всех трех технологий получены численные результаты по оценке коэффициентов характеристических уравнений P_i. Даны табличные значения коэффициентов, по которым с использованием определителей по матрице Гурвица получены оценки устойчивости для скорости протока 0,1 ч$^{-1}$, 0,2 ч$^{-1}$, 0,3 ч$^{-1}$. Приведены результаты численных оценок для устойчивости стационарных состояний для трех технологий. Оценки базировались на показателях, ранее опубликованных в научных исследованиях констант.

Ключевые слова: молочная кислота, уравнения нестационарных состояний, оценка устойчивости, матрица Гурвица, технология

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского химико-технологического университета им. Д. И. Менделеева.

Для цитирования: *Гордеева Ю. Л., Бородкин А. Г., Гордеева Е. Л., Комиссаров Ю. А.* Математическое моделирование нестационарности биотехнологического получения молочной кислоты: устойчивость // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2021. № 2 (72). С. 15–29. doi: 10.24143/1812-9498-2021-2-15-29.

Original article

Mathematical modeling nonstationarity of biotechnological production of lactic acid: stability

Yuliya L. Gordeeva[1]✉, Aleksey G. Borodkin[2, 3], Elena L. Gordeeva[2, 4], Yuriy A. Komissarov[2, 5]

[1] Moscow State Academy of Veterinary Medicine and Biotechnology - MVA by K. I. Skryabin, Moscow, Russia, l.s.gordeev@yandex.ru✉

[2] Mendeleev University of Chemical Technology, Moscow, Russia

Abstract. The article presents the calculated ratios of indicators determining the stationary states of the lactic acid production process. Three technologies that are most often mentioned in scientific publications are identified: the technology of using strains of microorganisms to produce biomass is a technology that is extremely rarely used; the fairly common technology of using strains of microorganisms to produce lactic acid with the consumption of the main substrate (most often glucose); the promising technology of obtaining lactic acid using, in addition to the main substrate, a component that reproduces the main substrate in the synthesis process. For each technology, the equations of material balance for stationary and non-stationary conditions, a generalized differential equation for non-stationary conditions, and a characteristic equation are given. The formulas for estimating the coefficients of differential equations and the coefficients of the characteristic equation are also given. The equations for non-stationary conditions according to the last two technologies are based on the use of the Taylor series expansion of functions with the preservation of only the first terms of the expansion, i. e. deviations from stationarity in small. The characteristic equation is formed using the eigenvalues λ. The methodology for all three technologies is given, which allows us to assess the stability of the considered stationary state – the Hurwitz method. For all three technologies, numerical results are obtained for estimating the coefficients of the characteristic equations P_i. Tabular values of the coefficients are given, according to which stability estimates for the dilution rate of 0.1 h^{-1}, 0.2 h^{-1}, 0.3 h^{-1} are obtained using determinants according to the Hurwitz matrix. The results of numerical estimates for the stability of stationary states for all three technologies are presented. The estimates were based on the indicators of constants published in scientific studies.

Keywords: lactic acid, equations of non-stationary states, stability estimation, Hurwitz matrix, technology

Acknowledgements: The work was carried out with the financial support of Mendeleev University of Chemical Technology.

For citation: Gordeeva Yu. L., Borodkin A. G., Gordeeva E. L., Komissarov Yu. A. Mathematical modeling nonstationarity of biotechnological production of lactic acid: stability. *Vestnik of Astrakhan State Technical University.* 2021;2 (72):15-29. (In Russ.) DOI: 10.24143/1812-9498-2021-2-15-29.

Введение

При реализации синтеза молочной кислоты в процессе всегда происходят возмущения (отклонения показателей процесса от стационарного значения). Если эти отклонения не приводят к нарушению технологического процесса и с течением времени значения показателей возвращаются к первоначальным, стационарное состояние устойчиво. В противном случае для реализации процесса требуется внешнее управление.

Так как малых возмущений избежать практически не удается, то, если наблюдается нарушение технологического процесса, приводящее к невозможности обеспечения его функционального назначения, процесс считается неустойчивым в малом. Математический анализ такого рода устойчивости или неустойчивости в малом получил название «устойчивость первого приближения», оценка которой возможна по условиям Гурвица. Подробный математический анализ в доступной форме приведен в работах [1, 2].

Процессы микробиологического синтеза достаточно широко распространены. Однако в настоящем исследовании речь идет о промышленно значимых процессах получения целевых продуктов [3], в частности пищевых кислот [4].

Рассматриваемые процессы отвечают следующим условиям: в процессе синтеза производится биомасса X, получается целевой продукт P, расходуется основной субстрат S. Сущность процесса определяется кинетикой роста биомассы, основным показателем которой является удельная скорость роста μ, т. к. биомасса является продуцентом образования продукта.

Математически удельная скорость роста для рассматриваемого объекта является в общем случае нелинейной функцией X, S, P. Кроме того, в процессе ферментации удельная скорость роста в той или иной степени может быть ингибирована каждым из показателей X, S, P.

Отметим, что для отдельных штаммов микроорганизмов при ферментации кроме целевого продукта образуются побочные, иногда представляющие практическую ценность [5, 6]. Таких продуктов образуется, как правило, незначительное количество [7]. С другой стороны, поскольку сырье является наиболее расходной статьей процесса, имеется тенденция [5, 6] к использованию воспроизводимого сырья, что отмечено в работах [8–10].

Уравнения математических моделей

Нестационарные состояния оцениваются преимущественно с использованием математических моделей [5, 6, 11]. При этом имеет место большое разнообразие уравнений математических моделей, ориентированных, с одной стороны, на характеристики штаммов микроорганизмов, с другой стороны, согласно представлениям конкретных исследователей – на характер взаимоотношения компонентов в процессе синтеза. В достаточно полной мере эти позиции освещены в обзорах [5, 6, 11] и других публикациях. Таким образом, в общем виде сформировать единую систему уравнений не представляется возможным. В настоящей публикации представлены уравнения трех типов.

Первый тип отвечает условиям использования штамма, не воспроизводящего молочную кислоту, т. е. ориентирован только на получение биомассы [12]. Эта математическая модель содержит только два уравнения: уравнение баланса и уравнение для удельной скорости роста. Уравнения для стационарных условий имеют следующий вид:

$$\mu X - DX = 0; \tag{1}$$

$$D\left(S_0 - S\right) - \frac{1}{Y_{X/S}}\mu X = 0; \tag{2}$$

$$\mu = \mu_{\max}\frac{K_i S}{K_m K_i + K_i S + S^2}, \tag{3}$$

где μ – удельная скорость роста микроорганизмов, ч$^{-1}$; D – величина протока, ч$^{-1}$; X – концентрация биомассы, г/л; S – концентрация субстрата, г/л; $Y_{X/S}$ – стехиометрический коэффициент, г/г; K_i – константа ингибирования, г/л; K_m – константа насыщения субстрата, г/л; 0 – начальное значение; max – максимальное значение.

Второй тип уравнения отвечает условиям получения молочной кислоты при использовании основного субстрата, как правило глюкозы.

Математическая модель содержит следующие уравнения для стационарных условий:

$$-DX + \mu X = 0;$$

$$D\left(S_f - S\right) - \frac{1}{Y_{X/S}}\mu X = 0;$$

$$-DP + \left(\alpha\mu + \beta\right)X = 0;$$

$$\mu = \mu_{\max}\left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)\frac{K_i S}{K_m K_i + K_i S + S^2},$$

где P – концентрация продукта, г/л; α, β – константы.

Соотношения уравнений для моделирования наиболее часто используются для различных видов удельной скорости роста μ.

Третий тип уравнения используется достаточно редко (судя по публикациям), хотя в определенной степени он более привлекателен. Привлекательность заключается в том, что здесь расширяется сырьевая база и, как следствие, возрастает экономическая эффективность синтеза.

Данная технология, кроме основного субстрата, использует компонент *M*, воспроизводящий основной субстрат в процессе синтеза. Уравнения математической модели имеют вид:

$$-DX + \mu X = 0; \tag{4}$$

$$-\frac{1}{Y_{X/S}}\mu X + D\left(S_0 - S\right) + k_M M = 0; \tag{5}$$

$$\left(\alpha\mu + \beta\right) X - DP = 0; \tag{6}$$

$$D\left(M_0 - M\right) - k_M M = 0, \tag{7}$$

где

$$\mu = \mu_{\max}\left(1 - \frac{X}{X_{\max}}\right)^{0,5}\left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)^{0,5}\frac{K_i S}{K_m K_i + K_i S + S^2}, \tag{8}$$

где k_M – константа, определяющая количество воспроизведенного субстрата, ч$^{-1}$; *M* – концентрация сырья, дополнительно воспроизводящего субстрат, г/л.

Таким образом, обозначены уравнения математических моделей, которые используются в дальнейшем.

Нестационарные состояния. Устойчивость

Нестационарные состояния рассмотрены для трех условий организации технологического процесса. Первой технологии отвечает организация процесса, когда используется штамм микроорганизмов, предназначенных для получения только биомассы. Условия второй технологии предполагают использование для получения молочной кислоты только основного субстрата, потребляемого микроорганизмами, содержащегося в поступающем потоке (например, глюкозе).

Третья технология относится к процессам, использующим кроме основного субстрата сырье, воспроизводящее основной субстрат в процессе синтеза (например, мальтозу).

Условия первой технологии.

Уравнения (1)–(3) записываются для нестационарных состояний:

$$\frac{dX}{dt} = F_1\left(X,\ S\right) = \mu X - DX; \tag{9}$$

$$\frac{dS}{dt} = F_2\left(X,\ S\right) = D\left(S_0 - S\right) - \frac{1}{Y_{X/S}}\mu X; \tag{10}$$

$$\mu = \mu_{\max}\frac{K_i S}{K_m K_i + K_i S + S^2}.$$

Вводятся приращения по *X* и *S* от стационарных значений:

$$X = X_{ст} + \delta_1;\ \ S = S_{ст} + \delta_2,$$

где $X_{ст}$ и $S_{ст}$ – значения *X* и *S* для конкретного стационарного состояния.

Уравнения (9) и (10) примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(X_{\text{ст}}+\delta_1\right)=F_1\left(X_{\text{ст}}+\delta_1;\ S_{\text{ст}}+\delta_2\right);$$

$$\frac{d}{dt}\left(S_{\text{ст}}+\delta_2\right)=F_2\left(X_{\text{ст}}+\delta_1;\ S_{\text{ст}}+\delta_2\right).$$

Используя разложение F_1 и F_2 в ряд Тейлора с сохранением первых двух членов ряда, получаем:

$$\frac{d\delta_1}{dt}=a_1\delta_1+b_1\delta_2; \qquad (11)$$

$$\frac{d\delta_2}{dt}=a_2\delta_1+b_2\delta_2, \qquad (12)$$

где

$$a_1=\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)_{\text{ст}};\ b_1=\left(\frac{\partial F_1}{\partial S}\right)_{\text{ст}};\ a_2=\left(\frac{\partial F_2}{\partial X}\right)_{\text{ст}};\ b_2=\left(\frac{\partial F_2}{\partial S}\right)_{\text{ст}}.$$

При этом $F_1(X, S)_{\text{ст}} = F_2(X, S)_{\text{ст}} = 0$. Уравнения (11), (12) преобразуются в одно дифференциальное уравнение второго порядка по δ_1.

Получено:

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2}-P_1\frac{d\delta_1}{dt}-P_2\delta_1=0,$$

где $P_1=a_1+b_2$; $P_2=b_1a_2-b_2a_1$.

Характеристическое уравнение:

$$r^2-P_1r-P_2=0.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости:

$$-P_1>0;\ -P_2>0.$$

В табл. 1 приведены формулы для вычисления констант (11) и (12): a_1, b_1, a_2, b_2.

Таблица 1
Table 1

Расчетные соотношения для вычисления a_1, b_1, a_2, b_2
Design ratios for calculating a_1, b_1, a_2, b_2

Обозначение коэффициента	Расчетная формула
a_1	$\mu_{\max}\frac{K_iS_{\text{ст}}}{K_mK_i+K_iS_{\text{ст}}+S_{\text{ст}}^2}-D$
b_1	$\mu_{\max}K_i\frac{\left(K_mK_i-S_{\text{ст}}^2\right)X_{\text{ст}}}{\left(K_mK_i+K_iS_{\text{ст}}+S_{\text{ст}}^2\right)^2}$
a_2	$-\frac{\mu_{\max}}{Y_{X/S}}\frac{K_iS_{\text{ст}}}{K_mK_i+K_iS_{\text{ст}}+S_{\text{ст}}^2}$
b_2	$-D-\frac{X_{\text{ст}}}{Y_{X/S}}K_i\frac{\left(K_mK_i-S_{\text{ст}}^2\right)}{\left(K_mK_i+K_iS_{\text{ст}}+S_{\text{ст}}^2\right)^2}$

Пример численного расчета не приводится, т. к. использование штаммов, не производящих молочную кислоту, не представляет технологического интереса.

Условия второй технологии.

Уравнения математической модели процесса микробиологического синтеза в нестационарном состоянии в непрерывных условиях функционирования имеют следующий вид:

$$\frac{dX}{dt} = -DX + \mu X = F_1(X, S, P); \tag{13}$$

$$\frac{dS}{dt} = D(S_f - S) - \frac{1}{Y_{X/S}} \mu X = F_2(X, S, P), \tag{14}$$

$$\frac{dP}{dt} = -DP + (\alpha\mu + \beta) X = F_3(X, S, P), \tag{15}$$

где $D = Q / V$; V – объем заполнения реактора, м^3; Q – объемная скорость поступающего потока, м^3/ч; μ – удельная скорость роста биомассы, ч$^{-1}$; $Y_{X/S}$ – стехиометрический коэффициент, г/г; X, S, P – концентрация на выходе из реактора биомассы, субстрата и продукта соответственно, г/л; S_f – концентрация субстрата в потоке, поступающем в реактор, г/л; α, β – константы. Этот тип условий является наиболее распространенным в научных и технологических разработках.

Используются различные варианты удельной скорости роста. Часто эти варианты принимаются авторами без достаточного научного обоснования. Наиболее часто рассматриваются варианты с удельной скоростью роста, ингибируемой концентрацией продукта и концентрацией субстрата в виде соотношения

$$\mu = \mu_{\max}\left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)\frac{K_i S}{K_m K_i + K_i S + S^2},$$

где $\mu_{\max}$ – максимальная удельная скорость роста, ч$^{-1}$; $P_{\max}$ – константа насыщения продукта, г/л; K_i – константа ингибирования субстрата, г/л; K_m – константа насыщения субстрата, г/л.

Стационарные условия процесса (невозмущенное движение):

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0.$$

Координаты возмущенного движения представляются в виде суммы координат невозмущенного движения и приращения, являющегося функцией времени t. Так, для уравнений (13)–(15) координаты возмущенного движения: $X = X_{\text{ст}} + \delta_1(t)$; $S = S_{\text{ст}} + \delta_2(t)$; $P = P_{\text{ст}} + \delta_3(t)$.

Уравнения (13)–(15) примут вид:

$$\frac{d}{dt}(X_{\text{ст}} + \delta_1) = F_1(X_{\text{ст}} + \delta_1;\ S_{\text{ст}} + \delta_2;\ P_{\text{ст}} + \delta_3);$$

$$\frac{d}{dt}(S_{\text{ст}} + \delta_2) = F_2(X_{\text{ст}} + \delta_1;\ S_{\text{ст}} + \delta_2;\ P_{\text{ст}} + \delta_3);$$

$$\frac{d}{dt}(P_{\text{ст}} + \delta_3) = F_3(X_{\text{ст}} + \delta_1;\ S_{\text{ст}} + \delta_2;\ P_{\text{ст}} + \delta_3).$$

Используется разложение F_1, F_2 и F_3 в ряд Тейлора с сохранением первых двух членов ряда, получим:

$$\frac{d\delta_1}{dt} = a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + c_1\delta_3; \tag{16}$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = a_2\delta_1 + b_2\delta_2 + c_2\delta_3; \tag{17}$$

$$\frac{d\delta_3}{dt} = a_3\delta_1 + b_3\delta_2 + c_3\delta_3 . \tag{18}$$

Формулы расчета коэффициентов уравнений (16)–(18) приведены в табл. 2, где

$$a_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X}\right)_{\text{ст}}; \ b_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial S}\right)_{\text{ст}}; \ c_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X}\right)_{\text{ст}} .$$

Частные производные в уравнениях вычисляются для стационарных состояний.

Таблица 2
Table 2

Расчетные соотношения для вычисления коэффициентов уравнений (16)–(18)
Design ratios for calculating the coefficients of equations (16)-(18)

Обозначение коэффициента	Расчетная формула
a_1	0
b_1	$X_{\text{ст}}\dfrac{D^2P_{\max}}{P_{\max}-P_{\text{ст}}}\dfrac{K_mK_i-S_{\text{ст}}^2}{\mu_{\max}K_iS_{\text{ст}}^2}$
c_1	$-\dfrac{D}{P_{\max}-P_{\text{ст}}}X_{\text{ст}}$
a_2	$-\dfrac{D}{Y_{X/S}}$
b_2	$-D-\dfrac{X_{\text{ст}}}{Y_{X/S}}\dfrac{D^2P_{\max}}{P_{\max}-P_{\text{ст}}}\dfrac{K_mK_i-S_{\text{ст}}^2}{\mu_{\max}K_iS_{\text{ст}}^2}$
c_2	$\dfrac{DX_{\text{ст}}}{Y_{X/S}\left(P_{\max}-P_{\text{ст}}\right)}$
a_3	$\alpha D+\beta$
b_3	$\alpha X_{\text{ст}}\dfrac{D^2P_{\max}}{P_{\max}-P_{\text{ст}}}\dfrac{K_mK_i-S_{\text{ст}}^2}{\mu_{\max}K_iS_{\text{ст}}^2}$
c_3	$-D-\dfrac{\alpha D}{P_{\max}-P_{\text{ст}}}X_{\text{ст}}$

Оценка условий устойчивости стационарного состояния возможна по одному из двух вариантов. Приведем формулировку обоих.

Согласно первому варианту необходимо использовать уравнения (16)–(18), сформировав из трех уравнений первого порядка единственное уравнение третьего порядка.

В соответствии с качественной теорией дифференциальных уравнений три уравнения (16)–(18) приводятся к дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$P_0\frac{d^3\delta_1}{dt^3} + P_1\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + P_2\frac{d\delta_1}{dt} + P_3\delta_1 = 0 , \tag{19}$$

где $P_0 = b_1$; $P_1 = -\left(a_1b_1 + M_2\right) - \left(c_3b_1 - c_1b_3\right)$; $P_2 = -\left(M_1b_1 - M_2a_1\right) - b_3\left(a_1c_1 + M_3\right) + c_3\left(a_1b_1 + M_2\right)$; $P_3 = -a_3A - b_3\left(M_1c_1 - M_3a_1\right) + c_3\left(M_1b_1 - M_2a_1\right)$; $M_1 = b_1a_2 + c_1a_3$; $M_2 = b_1b_2 + c_1b_3$; $M_3 = b_1c_2 + c_1c_3$; $A = M_3b_1 - M_2c_1$.

Необходимое и достаточное условие устойчивости для дифференциальных уравнений третьего порядка получено И. А. Вышнеградским, а также К. И. Максвеллом [13].

Формируется определитель с использованием матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_0 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix} . \tag{20}$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости – положительность главных миноров определителя (20), т. е.

$$\Delta_1 = P_1 > 0\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_0 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} > 0\,;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} P_1 & P_0 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix} > 0\,. \qquad (21)$$

Раскрывая Δ_3 по последней строке, получаем:

$$\Delta_4 = P_3\,;\ \Delta_2 = P_3 \begin{vmatrix} P_1 & P_0 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} > 0\,. \qquad (22)$$

Согласно второму варианту формируется характеристическое уравнение с использованием собственных чисел λ. Приведем последовательность формирования характеристического уравнения. Используя константы, приведем определитель, содержащий собственные числа λ:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получаем следующие соотношения, по которым формируется характеристическое уравнение:

$$\left(a_1 - \lambda\right)\begin{vmatrix} b_2 - \lambda & \tilde{n}_2 \\ b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 - \lambda \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$-P_0\lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3\,,$$

где $P_0 = -1{,}0$; $P_1 = a_1 + b_2 + c_3$; $P_2 = (b_1a_2 + c_1a_3) - (a_1c_3 + a_1b_2) - (b_2c_3 - c_2b_3)$; $P_3 = (b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3) + (c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2) + (a_1b_2c_3 - a_2c_2b_3)$.

Раскрыв обозначения в (19), получим значения P_0, P_1, P_2, P_3, аналогичные приведенным.

Оценка устойчивости проведена по первому варианту, т. е. с использованием соотношения (19).

Для численной оценки выбрано следующее стационарное состояние: D = 0,15 ч$^{-1}$; S_f = 25 г/л; $S_{ст}$ = 5,89 г/л; $X_{ст}$ = 7,64 г/л; $P_{ст}$ = 27 г/л; Q_P = 4,05 г/(л·ч).

Для численного моделирования использованы данные кинетических исследований анаэробного процесса микробиологического синтеза (табл. 3).

Таблица 3
Table 3

Численные значения констант*
Numerical values of constants

μ_{max}, ч$^{-1}$	P_{max}, г/л	K_m, г/л	K_i, г/л	$Y_{X/S}$, г/г	α, г/г	β, ч$^{-1}$
0,48	50	1,2	22	0,4	2,2	0,2

* Составлено по [2, 3].

Согласно табл. 2 для принятого стационарного состояния рассчитаны коэффициенты уравнений (16)–(18):

$$a_1 = 0{,}0;\ b_1 = -0{,}00846;\ c_1 = -0{,}04982;$$

$$a_2 = -0{,}375;\ b_2 = -0{,}1288;\ c_2 = -0{,}1246;$$

$$a_3 = 0{,}53;\ b_3 = -0{,}0186;\ c_2 = -0{,}2596.$$

Используя значения a_i, b_i, c_i, вычислены следующие показатели к уравнению (19):

$$M_1 = -0{,}02323;\ M_2 = 0{,}0020164;\ M_3 = 0{,}01188;\ A = -3{,}565 \cdot 10^{-8}.$$

Далее вычисляются коэффициенты уравнения (19):

$$P_0 = -0{,}00846;\ P_1 = -0{,}003286;\ P_2 = -0{,}000106;\ P_3 = -0{,}00002948.$$

Таким образом, уравнение (19) получилось с отрицательными коэффициентами. Для дальнейших вычислений умножаем (19) на (–1), получаем следующие значения: $P_0 = 0{,}00846$; $P_1 = 0{,}003286$; $P_2 = 0{,}000106$; $P_3 = 0{,}00002948$.

Далее следует, что все коэффициенты положительны. Согласно (21):

$$\Delta_1 = P_1 = 0{,}003286 > 0;$$

$$\Delta_2 = 0{,}003286 \cdot 0{,}000106 - 0{,}00846 \cdot 0{,}00002948 > 0;$$

$$\Delta_3 = 0{,}00002948 \cdot 0{,}99 \cdot 10^{-7} > 0;$$

$$\Delta_4 = 0{,}00002948 \cdot (0{,}003286 \cdot 0{,}000106 - 0{,}00846 \cdot 0{,}00002948) > 0 \text{ (согласно (22))}.$$

Заключение: рассмотренное стационарное состояние устойчиво.

Условия третьей технологии.

Данная технология пока не получила столь большого распространения, как предыдущая, однако она более приближена к практическим условиям реализации. Дело в том, что технологический процесс при синтезе молочной кислоты использует как основной субстрат (чаще всего глюкозу), так и сырье, образующее основной субстрат в процессе синтеза. Примером такого сырья является мальтоза [6, 7].

Математическая модель рассматриваемого объекта в нестационарных условиях имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = F_1(S, X, P, M);$$

$$\frac{dS}{dt} = F_2(S, X, P, M);$$

$$\frac{dP}{dt} = F_3(S, X, P, M);$$

$$\frac{dM}{dt} = F_4(S, X, P, M).$$

Значения нестационарных переменных запишем в виде суммы стационарного значения и малого приращения, т. е.

$$X = X_{\text{ст}} + \delta_1;\ \ S = S_{\text{ст}} + \delta_2;\ \ P = P_{\text{ст}} + \delta_3;\ \ M = M_{\text{ст}} + \delta_4.$$

Используя разложение функций F_1, F_2, F_3 и F_4 в ряд Тейлора для нестационарных условий, получим:

$$F_1 = F_{1\text{ст}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)_{\text{ст}} \delta_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial S}\right)_{\text{ст}} \delta_2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial P}\right)_{\text{ст}} \delta_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial M}\right)_{\text{ст}} \delta_4 . \tag{23}$$

Аналогично уравнению (23) записываются значения функций F_2, F_3 и F_4.

Материальный баланс для стационарных условий приведен в (4)–(8).

Стационарные значения $F_{1\text{ст}}$, $F_{2\text{ст}}$, $F_{3\text{ст}}$, $F_{4\text{ст}}$ в разложении функций F_1, F_2, F_3 и F_4 в ряд Тейлора равны нулю, и в результате получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\delta_1}{dt} = a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + c_1\delta_3 + d_1\delta_4 ; \tag{24}$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = a_2\delta_1 + b_2\delta_2 + c_2\delta_3 + d_2\delta_4\,; \tag{25}$$

$$\frac{d\delta_3}{dt} = a_3\delta_1 + b_3\delta_2 + c_3\delta_3 + d_3\delta_4\,; \tag{26}$$

$$\frac{d\delta_4}{dt} = a_4\delta_1 + b_4\delta_2 + c_4\delta_3 + d_4\delta_4\,. \tag{27}$$

Оценка устойчивости так же, как и для условий второй технологии, возможна по одному из двух вариантов.

Для дальнейшего анализа по первому варианту уравнения (24)–(27) преобразуются в одно уравнение четвертого порядка, в данном анализе относительно δ_1:

$$P_0\frac{d^4\delta_1}{dt^4} + P_1\frac{d^3\delta_1}{dt^3} + P_2\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + P_3\frac{d\delta_1}{dt} + P_4 = 0\,, \tag{28}$$

где

$$P_0 = b_1^2\,;\; P_1 = -[b_1\left(N_1 + A\right) + d_4 b_1^2]\,;\; P_2 = -[\left(N_4 - AN_1\right) - d_4 b_1\left(N_1 + A\right)]\,;$$

$$P_3 = -[\left(N_5 - AN_2\right) - d_4\left(N_4 - AN_1\right)]\,;\; P_4 = d_4\left(N_5 - AN_2\right);$$

$$M_1 = b_1 a_2 + c_1 a_3\,;\; M_2 = b_1 b_2 + c_1 b_3\,;\; M_3 = b_1 c_2 + c_1 c_3\,;$$

$$N_1 = a_1 b_1 + M_2\,;\; N_2 = M_1 b_1 - a_1 M_2\,;\; N_3 = M_3 b_1 - M_2 c_1\,;$$

$$N_4 = N_2 b_1 + N_3 b_3\,;\; N_5 = N_3\left(a_3 b_1 - b_3 a_1\right);\; A = c_3 b_1 - b_3 c_1\,.$$

Первым условием – тривиальным – является положительность коэффициентов уравнения (28). Если хотя бы один из коэффициентов меньше нуля – система неустойчива. Если один из коэффициентов равен нулю – система на грани устойчивости (следует принять, что неустойчива).

Далее формируется определитель матрицы Гурвица [1, 2]:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_0 & 0 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 & P_0 \\ 0 & P_4 & P_3 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность первых диагональных миноров определителя (29) [1, 2], т. е.

$$\Delta_1 = P_1 > 0\,;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_0 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} > 0\,;\; \Delta_3 \begin{vmatrix} P_1 & P_0 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ 0 & P_4 & P_3 \end{vmatrix} > 0, \tag{30}$$

и, наконец, определитель Δ_4 по (29) также больше нуля. Отметим, что последнее условие при раскрытии определителя (29) приводит к последнему соотношению (30) и именно это условие является нетривиальным.

Таким образом, получили условия оценки устойчивости рассматриваемого стационарного состояния (отметим, оценка в малом, т. е. при малых отклонениях от стационарности).

Для формирования соотношений для оценки P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 используются нижеследующие таблицы. В табл. 4 приведены расчетные соотношения для вычисления коэффициентов уравнений (24)–(27).

Таблица 4
Table 4

Расчетные соотношения для вычисления коэффициентов уравнений (24)–(27)
Design ratios for calculating the coefficients of equations (24)-(27)

Обозначение коэффициента	Расчетная формула
a_1	$-D\frac{n_1 X_{ст}}{X_{max} - X_{ст}}$
b_1	$\frac{D^2 X_{ст}\left(K_m K_i - S_{ст}^2\right)}{\mu_{max} K_i S_{ст}^2 \left(1 - X_{ст}/X_{max}\right)^{n_1}\left(1 - P_{ст}/P_{max}\right)^{n_2}}$
c_1	$-D\frac{n_2 X_{ст}}{P_{max} - P_{ст}}$
d_1	0,0
a_2	$-\frac{D}{Y_{X/S}}\frac{X_{ст} - X_{max} - n_1 X_{ст}}{X_{max} - X_{ст}}$
b_2	$-D^2\frac{X_{ст}\left(K_m K_i - S_{ст}^2\right)}{\mu_{max} K_i S_{ст}^2 \left(1 - X_{ст}/X_{max}\right)^{n_1}\left(1 - P_{ст}/P_{max}\right)^{n_2}} - D$
c_2	$\frac{D}{Y_{X/S}}\frac{n_2 X_{ст}}{P_{max} - P_{ст}}$
d_2	k_M
a_3	$\alpha D\frac{X_{max} - X_{ст} - n_1 X_{ст}}{X_{max} - X_{ст}} + \beta$
b_3	$\alpha D^2\frac{X_{ст}\left(K_m K_i - S_{ст}^2\right)}{\mu_{max} K_i S_{ст}^2 \left(1 - X_{ст}/X_{max}\right)^{n_1}\left(1 - P_{ст}/P_{max}\right)^{n_2}}$
c_3	$-D\frac{P_{max} + \alpha n_2 X_{ст} - P_{ст}}{P_{max} - P_{ст}}$
d_3	0,0
a_4	0,0
b_4	0,0
c_4	0,0
d_4	$-\left(D + k_M\right)$

Ввиду громоздкости вывода последовательность преобразования уравнений (24)–(27) в одно дифференциальное уравнение четвертого порядка не приводится.

Рассмотрим второй метод формирования характеристического уравнения для выражений (24)–(27). Метод использует понятие собственных чисел [13].

Матрица для формирования характеристического уравнения, включающая собственные числа λ:

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4-\lambda \end{vmatrix} = \left(a_1-\lambda\right)\begin{vmatrix} b_2-\lambda & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d_4-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & d_4-\lambda \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2-\lambda & d_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Последовательно раскрываем определители.

Первый определитель $\times\left(a_1-\lambda\right)$:

$$\left(a_1b_2c_3d_4 - a_1c_2b_3d_4\right) - \left(a_1b_2c_3 + a_1b_2d_4 + a_1c_3d_4 - a_1c_2b_3 + b_2c_3d_4 - c_2b_3d_4\right)\lambda +$$
$$+\left(a_1c_3 + a_1d_4 + a_1b_2 + b_2c_3 + b_2d_4 + c_3d_4 - c_2b_3\right)\lambda^2 - \left(c_3 + d_4 + b_2 + a_1\right)\lambda^3 + \lambda^4.$$

Второй определитель $\times\left(-b_1\right)$:

$$\left(b_1c_2a_3d_4 - b_1a_2c_3d_4\right) + \left(b_1a_2c_3 + b_1a_2d_4 - b_1c_2a_3\right)\lambda - b_1a_2\lambda^2.$$

Третий определитель $\times c_1$:

$$\left(c_1a_2b_3d_4 - c_1a_3b_2d_4\right) + \left(c_1b_2a_3 + c_1d_4a_3 - c_1a_2b_3\right)\lambda - c_1a_3\lambda^2.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$P_0\lambda^4 + P_1\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_3\lambda + P_4 = 0, \qquad (31)$$

где

$$\begin{cases} P_0 = 1{,}0; \\ P_1 = -\left(c_3 + d_4 + b_2 + a_1\right); \\ P_2 = \left(a_1c_3 + a_1d_4 + a_1b_2 + b_2c_3 + b_2d_4 + c_3d_4 - c_2b_3 - b_1a_2 - c_1a_3\right); \\ P_3 = (b_1a_2c_3 + b_1a_2d_4 - b_1c_2a_3 + c_1b_2a_3 + c_1a_3d_4 - c_1a_2b_3 - a_1b_2c_3 - \\ -a_1b_2d_4 - a_1c_3d_4 + a_1c_2b_3 - b_2c_3d_4 + c_2b_3d_4); \\ P_4 = \left(a_1b_2c_3d_4 - a_1c_2b_3d_4\right) + \left(b_1c_2a_3d_4 - b_1a_2c_3d_4\right) + \left(c_1a_2b_3d_4 - c_1b_2a_3d_4\right). \end{cases} \qquad (32)$$

Для оценки устойчивости используются соотношения (29), (30).

Числовой расчет выполнен для трех стационарных состояний, которые определяются значением величины протока, т. е. для D = 0,1 ч$^{-1}$; D = 0,2 ч$^{-1}$; D = 0,3 ч$^{-1}$.

Исходными данными являются уравнения математической модели для стационарного состояния (4)–(8), концентрация компонентов в поступающем потоке согласно [14]: S_0 = 60 г/л; M_0 = 20 г/л.

Численные значения констант для уравнений (31), (32) приведены в табл. 5 на основе [15].

Таблица 5
Table 5

Численные значения констант для базового варианта
Numerical values of constants for the basic version

K_m, г/л	K_i, г/л	μ_{max}, ч$^{-1}$	X_{max}, г/л	P_{max}, г/л	n_1	n_2	$Y_{X/S}$, г/г	k_M, ч$^{-1}$	α, г/г	β, ч$^{-1}$
1,2	164	0,48	30	98,0	0,5	0,5	0,4	0,035	2,2	0,02

Показатели для трех стационарных состояний приведены в табл. 6, в ней же дана оценка величины продуктивности для каждого стационарного состояния.

Таблица 6
Table 6

Результаты моделирования процесса для трех показателей *D*
Results of process modeling for three indicators *D*

Показатели процесса	X, г/л	P, г/л	S, г/л	M, г/л	Q_P, г/(л·ч)
D_1 = 0,1 ч$^{-1}$	24,41	58,58	4,16	14,81	5,86
D_2 = 0,2 ч$^{-1}$	17,67	40,64	18,8	17,02	8,13
D_3 = 0,3 ч$^{-1}$	6,48	14,69	45,89	17,91	4,40

Численные значения коэффициентов уравнений (24)–(27) приведены в табл. 7.

Таблица 7
Table 7

Расчет для трех стационарных состояний по $D_1 = 0{,}1$ ч$^{-1}$; $D_2 = 0{,}2$ ч$^{-1}$; $D_3 = 0{,}3$ ч$^{-1}$ для уравнений (24)–(27)
Coefficients of equations (24)-(27) calculated for three stationary states at $D_1 = 0.1$ h^{-1}; $D_2 = 0.2$ h^{-1}; $D_3 = 0.3$ h^{-1}

Обозначение коэффициента	$D_1 = 0{,}1$ ч$^{-1}$	$D_2 = 0{,}2$ ч$^{-1}$	$D_3 = 0{,}3$ ч$^{-1}$
a_1	–0,21833	–0,1433	–0,04132
b_1	0,11747	–0,00697	–0,008226
c_1	–0,03096	–0,0308	–0,01166
d_1	0	0	0
a_2	0,7958	0,8582	0,8533
b_2	–0,39369	0,02028	0,02056
c_2	0,0774	0,07701	0,02916
d_2	0,035	0,035	0,035
a_3	–0,26033	0,14472	0,5891
b_3	0,25845	–0,017848	–0,0181
c_3	–0,1681	–0,2678	–0,3256
d_3	0	0	0
a_4	0	0	0
b_4	0	0	0
c_4	0	0	0
d_4	–0,135	–0,235	–0,335

Вычисление констант a_i, b_i, c_i, d_i произведено по табл. 2.

Значения показателей в поступающем потоке [10]: $S_0 = 60$ г/л; $M_0 = 20$ г/л.

Для вычисления значений a_i, b_i, c_i, d_i использованы показатели стационарных состояний (табл. 6).

Далее вычисляются показатели P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 по формуле (32). Значения приведены в табл. 8, т. е. использован второй вариант по собственным числам λ.

Таблица 8
Table 8

Значения показателей P_i
Values of P_i indicators

D	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
0,1	1,0	0,12774	0,1726	0,00903	0,0
0,2	1,0	0,5258	0,09456	0,01172	0,060319
0,3	1,0	0,48136	0,0683	0,00855	0,0007

Оценка устойчивости по соотношениям (21), (22) подтвердила, что стационарные состояния для $D = 0{,}2$ ч$^{-1}$ и $D = 0{,}3$ ч$^{-1}$ устойчивы. Состояние $D = 0{,}1$ ч$^{-1}$, предположительно, находится на грани устойчивости, т. к. Δ_4 имеет порядок 10^{-9}.

Заключение

Представленная в настоящем исследовании методология является достаточно общей и может быть использована и для других видов кинетических соотношений, в том числе и для процесса, в котором не используется компонент, воспроизводящий основной субстрат в процессе синтеза. Единственным ограничением является то, что анализ базируется на условиях первого приближения, т. е. при малых возмущающих воздействиях. В рамках данного анализа не рассматривается возможность судить об устойчивости при больших возмущающих воздействиях.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1998. 480 с.

2. *Жукова Г. С., Митрохин С. И., Дарсалия В. Ш.* Дифференциальные уравнения. М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 1999. 366 с.

3. *Бирюков В. В.* Основы промышленной биотехнологии. М.: Колосс, Химия, 2004. 296 с.

4. *Смирнов В. А.* Пищевые кислоты. М.: Легкая и пищевая промышленность, 1983. 240 с.

5. *Гордеев Л. С., Match Кознов А. В., Скичко А. С., Гордеева Ю. Л.* Неструктурированные математические модели кинетики биосинтеза молочной кислоты. Обзор // Теорет. основы хим. технологии. 2017. Т. 51. № 2. С. 8–25.

6. *Гордеева Ю. Л., Рудаковская Е. Л., Гордеева Е. Л., Бородкин А. Г.* Математическое моделирование биотехнологического процесса периодической ферментации получения молочной кислоты. Обзор // Теорет. основы хим. технологии. 2017. Т. 51. № 3. С. 1–18.

7. *Vazquez J. A., Murado M. A.* Unstructured mathematical model for biomass, lactic and bacteriocin productions by lactic acid bacteria in batch fermentation // Journal Chemical Technology Biotechnology. 2008. Vol. 83. P. 91–96.

8. *Åkerberg C., Hofvendahl K., Zacchi G., Hahn-Hägerdal B.* Modelling the influence of pH, temperature, glucose and lactic acid concentrations on the kinetics of lactic acid production by Lactococcus lactis ssp. lactis ATCC 19435 in whole-wheat flour // Applied Microbiology and Biotechnology. 1998. Vol. 49. N. 6. P. 682–690.

9. *Hofvendahl K., Hahn-Hägerdal B.* L-lactic acid production from whole wheat flour hydrolysate using strains of Lactobacilli and Lactococci // Enzyme and Microbial Technology. 1997. Vol. 20. N. 4. P. 301.

10. *Gonzales K., Tebbano S., Lapes F., Thorigne A., Givry S., Dumar D., Pareau D.* Modeling the continuous lactic acid production process from wheat flour // Applied Microbiology and Biotechnology. 2016. Vol. 100. N. 1. P. 147–159.

11. *Гордеева Ю. Л., Бородкин А. Г., Гордеева Е. Л., Рудаковская Е. Г.* Математическое моделирование ферментативного процесса получения молочной кислоты. Обобщенная модель // Теорет. основы хим. технологии. 2019. Т. 53. № 1. С. 46–53.

12. *Edwards V. H., Wilke C. R.* Mathematical representation of batch culture date // Biotechnology Bioengineering. 1968. N. 10. P. 205–232.

13. *Фельдбаум А. А., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П., Миролюбов Н. Н.* Теоретические основы связи и управления. М.: Физматгиз, 1963. 932 с.

14. *Wee Y. J., Kim J. N., Ryu H. W.* Biotechnological production of lactic acid and its recent applications // Food Technology and Biotechnology. 2006. Vol. 44. N. 2. P. 163–172.

15. *Гордеева Ю. Л., Бородкин А. Г., Гордеев Л. С.* Оптимальные технологические показатели получения молочной кислоты непрерывной ферментацией // Теорет. основы хим. технологии. 2018. Т. 52. № 3. С. 334–340.

REFERENCES

1. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1998. 480 p.

2. Zhukova G. S., Mitrokhin S. I., Darsaliia V. Sh. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations]. Moscow, Izd-vo RKhTU im. D. I. Mendeleeva, 1999. 366 p.

3. Biriukov V. V. *Osnovy promyshlennoi biotekhnologii* [Fundamentals of industrial biotechnology]. Moscow, Koloss, Khimiia Publ., 2004. 296 p.

4. Smirnov V. A. *Pishchevye kisloty* [Food acids]. Moscow, Legkaia i pishchevaia promyshlennost' Publ., 1983. 240 p.

5. Gordeev L. S., Koznov A. V., Skichko A. S., Gordeeva Iu. L. Nestrukturirovannye matematicheskie modeli kinetiki biosinteza molochnoi kisloty. Obzor [Unstructured mathematical models of kinetics of biosynthesis of lactic acid. Overview]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii,* 2017, vol. 51, no. 2, pp. 8-25.

6. Gordeeva Iu. L., Rudakovskaia E. L., Gordeeva E. L., Borodkin A. G. Matematicheskoe modelirovanie biotekhnologicheskogo protsessa periodicheskoi fermentatsii polucheniia molochnoi kisloty. Obzor [Mathematical modeling of biotechnological process of periodic fermentation of lactic acid production. Overview]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii,* 2017, vol. 51, no. 3, pp. 1-18.

7. Vazquez J. A., Murado M. A. Unstructured mathematical model for biomass, lactic and bacteriocin productions by lactic acid bacteria in batch fermentation. *Journal Chemical Technology Biotechnology,* 2008, vol. 83, pp. 91-96.

8. Åkerberg C., Hofvendahl K., Zacchi G., Hahn-Hägerdal B. Modelling the influence of pH, temperature, glucose and lactic acid concentrations on the kinetics of lactic acid production by Lactococcus lactis ssp. lactis ATCC 19435 in whole-wheat flour. *Applied Microbiology and Biotechnology,* 1998, vol. 49, no. 6, pp. 682-690.

9. Hofvendahl K., Hahn-Hägerdal B. L-lactic acid production from whole wheat flour hydrolysate using strains of Lactobacilli and Lactococci. *Enzyme and Microbial Technology,* 1997, vol. 20, no. 4, p. 301.

10. Gonzales K., Tebbano S., Lapes F., Thorigne A., Givry S., Dumar D., Pareau D. Modeling the continuous lactic acid production process from wheat flour. *Applied Microbiology and Biotechnology,* 2016, vol. 100, no. 1, pp. 147-159.

11. Gordeeva Iu. L., Borodkin A. G., Gordeeva E. L., Rudakovskaia E. G. Matematicheskoe modelirovanie fermentativnogo protsessa polucheniia molochnoi kisloty. Obobshchennaia model' [Mathematical modeling

of enzymatic process of obtaining lactic acid. Generalized model]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii,* 2019, vol. 53, no. 1, pp. 46-53.

12. Edwards V. H., Wilke C. R. Mathematical representation of batch culture date. *Biotechnology Bioengineering,* 1968, no. 10, pp. 205-232.

13. Fel'dbaum A. A., Dudykin A. D., Manovtsev A. P., Miroliubov N. N. *Teoreticheskie osnovy sviazi i upravleniia* [Theoretical foundations of communication and management]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 932 p.

14. Wee Y. J., Kim J. N., Ryu H. W. Biotechnological production of lactic acid and its recent applications. *Food Technology and Biotechnology,* 2006, vol. 44, no. 2, p. 163-172.

15. Gordeeva Iu. L., Borodkin A. G., Gordeev L. S. Optimal'nye tekhnologicheskie pokazateli polucheniia molochnoi kisloty nepreryvnoi fermentatsiei [Optimal technological parameters for production of lactic acid by continuous fermentation]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoi tekhnologii,* 2018, vol. 52, no. 3, pp. 334-340.

Статья поступила в редакцию 06.08.2021; одобрена после рецензирования 27.09.2021; принята к публикации 29.09.2021.
The article was submitted 06.08.2021; approved after reviewing 27.09.2021; accepted for publication 29.09.2021.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Юлия Львовна Гордеева − кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры информационных технологий, математики и физики; Московская государственная академия ветеринарной медицины и биотехнологии – МВА им. К. И. Скрябина; 109472, Москва, ул. Академика Скрябина, 23; l.s.gordeev@yandex.ru

Алексей Георгиевич Бородкин − доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии; Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева; 125047, Москва, Миусская пл., 9; axbeard@list.ru

Елена Львовна Гордеева − кандидат технических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики; Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева; 125047, Москва, Миусская пл., 9; Elena.Gordeeva311@yandex.ru

Юрий Алексеевич Комиссаров − доктор технических наук, профессор; профессор кафедры процессов и аппаратов химической технологии; Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева; 125047, Москва, Миусская пл., 9; komiss@muctr.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuliya L. Gordeeva − Candidate of Technical Science, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department of Information Technologies, Mathematics and Physics; Moscow State Academy of Veterinary Medicine and Biotechnology - MVA by K. I. Skryabin; 109472, Moscow; Academician Scriabin St., 23; l.s.gordeev@yandex.ru

Aleksey G. Borodkin − Assistant Professor of the Department of Processes and Apparatus for Chemical Technology; Mendeleev University of Chemical Technology; 125047, Moscow, Miusskaya Square, 9; axbeard@list.ru

Elena L. Gordeeva − Candidate of Technical Science, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department of Mathematics; Mendeleev University of Chemical Technology; 125047, Moscow, Miusskaya Square, 9; Elena.Gordeeva311@yandex.ru

Yuriy A. Komissarov − Doctor of Technical Science, Professor; Professor of the Department of Processes and Apparatus for Chemical Technology; Mendeleev University of Chemical Technology; 125047, Moscow, Miusskaya Square, 9; komiss@muctr.ru