УПРАВЛЕНИЕ В СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

DOI: 10.24143/2072-9502-2021-4-82-94
УДК 330.42, 330.356.7, 519.2, 004.942

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Михеев

*Казанский национальный исследовательский технологический университет,
Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация*

Предложен вероятностный метод определения производственных функций. Метод состоит в нахождении математического ожидания функции, определяющей экономико-математический принцип производства продукции. При этом предполагается, что факторы производства и/или их удельные значения, входящие в эту функцию, являются случайными величинами. Показано, что в зависимости от используемого принципа производства в результате такого усреднения получаются различные вероятностные классы производственных функций. Функции, являющиеся элементами одного класса, отличаются друг от друга распределением вероятностей отношений факторов производства к их удельным значениям. Построены два вероятностных класса производственных функций. Первый класс порождается производственным принципом Леонтьева, второй – обобщением этого принципа на случай частично или полностью взаимозаменяемых факторов производства. Установлены законы распределения вероятностей и условия, при которых линейная комбинация AK-модели и производственной функции Кобба – Дугласа, а также производственная функция CES являются элементами класса производственных функций Леонтьева. Показано, что линейная производственная функция принадлежит классу обобщенных производственных функций Леонтьева. Найдены плотности распределения вероятностей количества выпускаемой продукции для этих двух классов производственных функций.

Ключевые слова: производственная функция, факторы производства, производственная функция Леонтьева, функция Кобба – Дугласа, AK-модель производственной функции, производственная функция CES, линейная производственная функция, плотность распределения вероятностей, математическое ожидание.

Для цитирования: *Михеев А. В.* Вероятностный подход к определению производственных функций // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 4. С. 82–94. DOI: 10.24143/2072-9502-2021-4-82-94.

Введение

Одной из основополагающих концепций современной неоклассической экономической теории является концепция производственной функции. Производственной функцией называется функциональная зависимость количества выпускаемой продукции Q от величины используемых факторов производства $X_1, X_2, \ldots : Q = f\left(X_1, X_2, \ldots\right)$. К факторам производства $X_1, X_2, \ldots$ обычно относят труд, капитал, землю и сырье. Вид функциональной зависимости определяется принципами производства, т. е. простейшими правилами, устанавливающими влияние отдельных факторов на количество итогового продукта. Наиболее часто используют следующие математические модели производственных функций (на примере двухфакторных производственных функций) [1–4]:

– линейная производственная функция $Q = \alpha_1 \dfrac{X_1}{x_1} + \alpha_2 \dfrac{X_2}{x_2}$. Здесь и далее $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, а x_j – удельное значение фактора $X_j, (j = 1,\ 2)$, т. е. такое количество фактора X_j, которое необходимо для производства одной единицы продукции. Удельные значения факторов производства определяются используемыми при производстве технологиями;

– AK-модель производственной функции $Q = X_1/x_1$, где X_1 – капитал. Является частным случаем линейной производственной функции ($\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0$), когда количество выпускаемой продукции зависит лишь от затрат капитала, понимаемого в широком смысле, с учетом имеющихся на производстве человеческих ресурсов. Название «AK-модель» проистекает из того, что обычно технологическую константу $1/x_1$ обозначают буквой A, а затраты капитала – буквой K. В этих обозначениях AK-модель принимает вид $Q = A \cdot K$;

– функция Кобба – Дугласа $Q = \left(\dfrac{X_1}{x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{X_2}{x_2}\right)^{\alpha_2}$;

– производственная функция Леонтьева $Q = \min\left(X_1/x_1, X_2/x_2\right)$;

– производственная функция CES, т. е. производственная функция, обладающая свойством постоянной эластичности замещения, $Q = \left(\alpha_1 \left(\dfrac{X_1}{x_1}\right)^r + \alpha_2 \left(\dfrac{X_2}{x_2}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}$.

Отметим, что линейная производственная функция, функция Кобба – Дугласа и функция Леонтьева являются частными случаями производственной функции CES соответственно при $r = 1$, $r \to 0$ и $r \to -\infty$ [2].

Приведенное выше определение производственной функции, а также все современные математические модели производственных функций неявно предполагают, что факторы производства, а также их удельные значения являются детерминированными величинами. Такой подход оправдан, в частности, если производственная функция определяется на небольшом интервале времени производства и для единственного производителя продукта. В этом случае значения факторов $X_1,\ X_2,\ \ldots$ и их удельных значений $x_1,\ x_2,\ \ldots$ либо не изменяются, либо изменяются мало и предсказуемо.

Однако при определении производственной функции на большом интервале времени для одного производителя продукта или, независимо от продолжительности производства, для ансамбля конкурирующих производителей одного и того же продукта необходимо учитывать практически непредсказуемую изменчивость рыночной конъюнктуры. Эта изменчивость делает факторы производства и, возможно, их удельные значения случайными величинами. При этом количество выпускаемой продукции Q тоже становится случайной величиной, и определение производственной функции необходимо скорректировать, сделав его вероятностным.

Целью настоящей работы является разработка вероятностного метода определения производственной функции в тех случаях, когда экономические условия, при которых проводится это определение, позволяют считать факторы производства $X_1,\ X_2,\ \ldots$ и, возможно, их удельные значения случайными величинами, а также применение этого метода для построения таких классов производственных функций, которые содержат в себе в качестве элементов упомянутые выше классические производственные функции: линейную функцию, AK-модель и функцию Кобба – Дугласа, а также производственную функцию CES.

Вероятностные классы производственных функций. Производственные функции Леонтьева

Обратим внимание, что факторы производства $X_1,\ X_2,\ \ldots$ входят во все вышеперечисленные математические модели производственных функций только в виде отношений $X_1/x_1,\ X_2/x_2,\ \ldots$, которые имеют простой экономический смысл: $Q_j = X_j/x_j$ – это максимальное количество продукции, которое может быть произведено из имеющегося ограниченного количества *j*-го фактора производства в предположении, что запасы всех остальных факторов неисчерпаемы и, следовательно, эти факторы не оказывают влияния на количество выпускаемой продукции. Отношение $Q_j = X_j/x_j$ далее будем называть мощностью *j*-го фактора производства. Таким образом, любую производственную функцию всегда можно определить как зависимость количества выпускаемой продукции от мощностей используемых факторов производства: $Q = f(Q_1,\ Q_2,\ \ldots)$.

Дальнейшее изложение проведем на примере двухфакторной производственной функции. Пусть количество выпускаемой продукции Q зависит только от двух факторов производства X_1 и X_2, например от затрат капитала и труда. В частности, зависимость Q от мощностей этих факторов имеет вид $Q = f(Q_1,\ Q_2)$. Если существуют основания считать факторы, X_2 и/или их удельные значения x_1, x_2, а вместе с ними и мощности факторов $Q_1,\ Q_2$ случайными величинами, то производственной функцией следует называть не функциональную зависимость $Q = f(Q_1,\ Q_2)$, а зависимость математического ожидания количества выпускаемой продукции $\tilde{Q}$ от параметров, входящих в законы распределения вероятности случайных величин $Q_1,\ Q_2$:

$$\tilde{Q} \equiv \mathrm{E}(Q) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(y_1, y_2)\,\varphi_{Q_1Q_2}(y_1, y_2)\,dy_2\right)dy_1, \tag{1}$$

где $\varphi_{Q_1Q_2}(y_1, y_2)$ – совместная плотность распределения вероятности случайных величин Q_1 и Q_2. Совместную плотность распределения вероятности $\varphi_{Q_1Q_2}(y_1,\ y_2)$ можно легко связать с совместной плотностью распределения вероятности факторов производства $X_1,\ X_2$ и их удельных значений x_1, x_2:

$$\varphi_{Q_1Q_2}(y_1,\ y_2) = \int_0^{+\infty} z_1\left(\int_0^{+\infty} z_2\,\varphi_{X_1x_1X_2x_2}(y_1z_1,\ z_1,\ y_2z_2,\ z_2)\,dz_2\right)dz_1.$$

При таком подходе функция $f(Q_1, Q_2)$ представляет собой математическое выражение принципа производства продукции, а формула (1) для каждой конкретной функциональной зависимости $f(Q_1,\ Q_2)$ определяет свой собственный вероятностный класс производственных функций, отличающихся друг от друга видом совместной плотности распределения вероятности $\varphi_{Q_1Q_2}(y_1,\ y_2)$. Естественно принять в качестве принципа производства одну из классических производственных функций. Однако из всех перечисленных выше математических моделей производственной функции только функция Леонтьева содержит в себе принцип производства: количество выпускаемой продукции всегда равно наименьшей из мощностей используемых факторов производства. Остальные модели изначально представляют собой результат аппроксимации реальных производственных функций в том или ином диапазоне изменения значений факторов производства и поэтому не могут использоваться в качестве принципа производства продукции. По этой причине в качестве простейшего принципа производства в (1) будем использовать функцию Леонтьева:

$$f\left(Q_1,\ Q_2\right)=\min\left(Q_1,\ Q_2\right). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), после несложных преобразований получим:

$$\tilde{Q}=\int_0^{+\infty} y_1\left(\int_{y_1}^{+\infty}\left(\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1,y_2\right)+\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_2,y_1\right)\right)dy_2\right)dy_1 . \tag{3}$$

Формула (3) определяет класс производственных функций, пригодных для описания производства продукции в соответствии с принципом Леонтьева. Назовем его вероятностным классом производственных функций Леонтьева. Поскольку процедура (1) вычисления математического ожидания является линейной операцией, все функции этого класса, независимо от вида совместной плотности распределения вероятности $\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1,y_2\right)$, наследуют свойства производственной функции Леонтьева.

Линейная комбинация АК-модели и функции Кобба – Дугласа как элемент класса производственных функций Леонтьева

Рассмотрим частный случай производственной функции (3), когда мощности факторов производства Q_1 и Q_2 являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Парето [5]:

$$\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1,y_2\right)=\frac{\nu_1\lambda_1{}^{\nu_1}}{y_1{}^{\nu_1+1}}H\left(y_1\ge\lambda_1\right)\frac{\nu_2\lambda_2{}^{\nu_2}}{y_2{}^{\nu_2+1}}H\left(y_2\ge\lambda_2\right), \tag{4}$$

где $H\left(A\right)$ – индикатор истинности логического высказывания *A*: $H\left(A\right)=1$, если высказывание *A* истинное, и $H\left(A\right)=0$, если высказывание *A* ложное; λ_j и $\nu_j\left(j=1,\ 2\right)$ – параметры масштаба и формы соответственно. Параметр масштаба $\lambda_j\ge 0$ имеет простой экономический смысл: он представляет собой наименьшую возможную для данного производства мощность *j*-го фактора производства. В то же время параметр формы $\nu_j>0$ показывает, насколько сильно могут отличаться реальные значения мощности *j*-го фактора производства от λ_j: чем больше ν_j, тем плотнее значения мощности *j*-го фактора концентрируются вблизи λ_j и тем с меньшей вероятностью реализуются значения Q_j, намного превосходящие λ_j. Математическое ожидание мощности *j*-го фактора производства существует только при $\nu_j>1:\tilde{Q}_j\equiv \mathrm{E}\left(Q_j\right)=\dfrac{\nu_j\lambda_j}{\nu_j-1}$. Поэтому математическое ожидание, в случае распределения Парето, является не очень хорошей оценкой среднего значения. Лучше в качестве оценки среднего значения мощности *j*-го фактора производства использовать медиану: $M_j=\lambda_j 2^{1/\nu_j}$, которая существует для любых $\nu_j>0$. Отметим, что $\tilde{Q}_j\approx M_j\approx\lambda_j$ при $\nu_j\gg 1$.

После подстановки закона распределения Парето (4) в (3) получаем следующую производственную функцию:

$$\tilde{Q}\left(\lambda_1,\ \lambda_2\right)=\begin{cases}\dfrac{\nu_2\lambda_2}{\nu_2-1}-\dfrac{\nu_1\lambda_1{}^{1-\nu_2}\lambda_2{}^{\nu_2}}{\left(\nu_2-1\right)\left(\nu_1+\nu_2-1\right)},\ \lambda_1>\lambda_2;\\ \dfrac{\nu_1\lambda_1}{\nu_1-1}-\dfrac{\nu_2\lambda_2{}^{1-\nu_1}\lambda_1{}^{\nu_1}}{\left(\nu_1-1\right)\left(\nu_1+\nu_2-1\right)},\ \lambda_1\le\lambda_2;\end{cases}\quad \nu_1+\nu_2>1. \tag{5}$$

Выражение (5) для производственной функции показывает, что среднее количество выпускаемой продукции $\tilde{Q}$, рассматриваемое как функция параметров λ_1 и λ_2 или, что то же самое, как функция медиан M_1 и M_2, представляет собой линейную комбинацию АК-модели и функции Кобба – Дугласа. Впервые такая конструкция производственной функции была предложена в работе [3]. Авторы этой работы предложили линейную комбинацию АК-модели и функции Кобба – Дугласа в качестве примера производственной функции, которая, с одной стороны, характеризуется постоянством отдачи капитала в долгосрочной перспективе (АК-модель), с другой стороны, обладает свойством убывающей отдачи капитала (функция Кобба – Дугласа). При этом они не дали никаких экономико-математических обоснований реализуемости этой модели на практике. В то же время, как показывают наши результаты (см. формулы (2)–(5)), линейная комбинация АК-модели и функции Кобба – Дугласа может наблюдаться на практике, если производство продукции происходит в соответствии с принципом Леонтьева (2), а мощности факторов производства являются независимыми случайными величинами, имеющими законы распределения Парето (4). При этом по отдельности АК-модель и функция Кобба – Дугласа являются лишь асимптотиками производственной функции (5). В частности, АК-модель аппроксимирует производственную функцию (5) в следующей области значений параметров λ_1 и λ_2: $(\lambda_1/\lambda_2)^{1-\nu_2} \ll \nu_2/\nu_1$ при $\lambda_1 > \lambda_2$ или $(\lambda_2/\lambda_1)^{1-\nu_1} \ll \nu_1/\nu_2$ при $\lambda_1 \le \lambda_2$. Если же выполняются условия $(\lambda_1/\lambda_2)^{1-\nu_2} \gg \nu_2/\nu_1$ при $\lambda_1 > \lambda_2$ или $(\lambda_2/\lambda_1)^{1-\nu_1} \gg \nu_1/\nu_2$ при $\lambda_1 \le \lambda_2$, то производственная функция (5) неотличима от функции Кобба – Дугласа.

Производственная функция (5), так же как и все производственные функции Леонтьева (2), является однородной первого измерения: $\tilde{Q}(k\lambda_1, k\lambda_2) = k\tilde{Q}(\lambda_1, \lambda_2)$ или $\tilde{Q}(kM_1, kM_2) = k\tilde{Q}(M_1, M_2)$. Следовательно, она обладает свойством: $\tilde{Q}/M_1 = g(M_2/M_1)$. На рис. 1 показаны типичные графики функции $g(M_2/M_1)$.

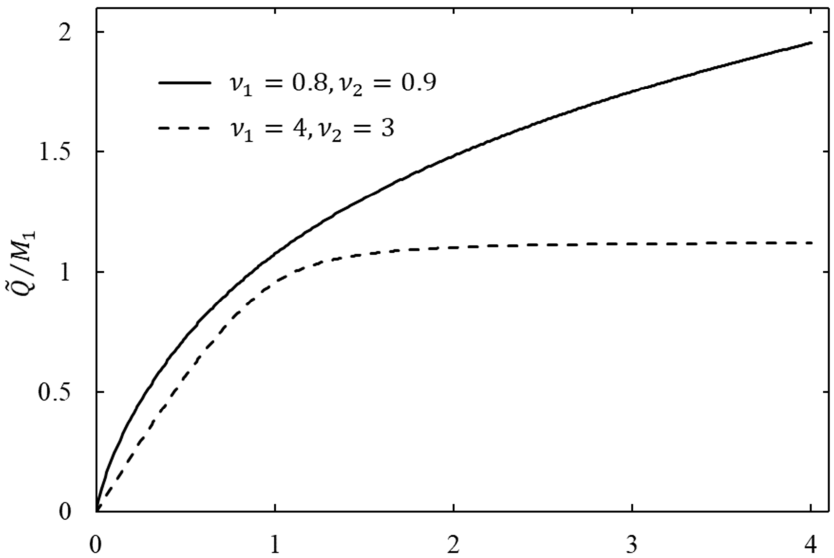

Рис. 1. Графики производственной функции (5), построенные для двух различных законов распределения Парето (4). Количество выпускаемой продукции $\tilde{Q}$ и медиана мощности второго фактора производства M_2 выражены в единицах медианы мощности первого фактора M_1

Они построены с помощью (5) и определения медиан $\lambda_j = 2^{-1/\nu_j} M_j$ для двух различных законов распределения Парето (4). Сплошная линия на рис. 1 соответствует ситуации $\nu_1 < 1$

и $\nu_2 < 1$. Как видим, при таких значениях параметров формы производственная функция (5) является неограниченной при $M_2 / M_1 \to +\infty$. В то же время пунктирная линия на рис. 1, полученная при $\nu_1 > 1$ и $\nu_2 > 1$, имеет вид кривой насыщения. И в том и другом случае производственная функция (5) обладает признаками неоклассической производственной функции: она является возрастающей и выпуклой, предельная производительность мощности одного из факторов очевидно уменьшается с увеличением этой мощности [1, 6]. Однако для экономики предприятия, выпускающего продукцию, ситуация с $\nu_1 < 1$ и $\nu_2 < 1$ более выгодна, т. к. при одних и тех же мощностях производственных факторов она характеризуется более высоким значением предельного продукта. Как видно из рис. 1, при $M_2 / M_1 > 1$ для штриховой линии предельный продукт практически равен нулю, в то время как для сплошной линии угловой коэффициент касательной в этой области еще очень далек от нуля.

Производственная функция CES как элемент класса производственных функций Леонтьева

Еще один важный частный случай производственной функции (3) получается, если мощности факторов производства Q_1 и Q_2 являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Вейбулла [5]:

$$\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1, y_2\right) = \frac{\nu_1 y_1^{\nu_1 - 1}}{\lambda_1^{\nu_1}} e^{-\left(y_1/\lambda_1\right)^{\nu_1}} H\left(y_1 \ge 0\right) \frac{\nu_2 y_2^{\nu_2 - 1}}{\lambda_2^{\nu_2}} e^{-\left(y_2/\lambda_2\right)^{\nu_2}} H\left(y_2 \ge 0\right). \qquad (6)$$

Здесь параметры λ_j и $\nu_j \left(j = 1,\ 2\right)$ называются так же, как и в случае распределения Парето (4), коэффициентами масштаба и формы соответственно. Математическое ожидание мощности *j*-го фактора производства в случае распределения Вейбулла существует для любых $\lambda_j > 0$ и $\nu_j > 0$: $\tilde{Q}_j \equiv \mathrm{E}\left(Q_j\right) = \lambda_j \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu_j}\right)$ и пропорционально параметру масштаба λ_j, где $\Gamma\left(z\right)$ – гамма-функция. При этом $\tilde{Q}_j$ практически не отличается от λ_j при $\nu_j > 1$. Таким образом, при $\nu_j > 1$ экономический смысл параметра масштаба λ_j состоит в том, что он примерно равен среднему значению мощности *j*-го фактора производства. Распределение Вейбулла при $\nu_j > 1$ является унимодальным. В этом случае чем больше значение параметра формы ν_j, тем плотнее значения мощности *j*-го фактора производства концентрируются вблизи среднего значения $\tilde{Q}_j$, примерно равного моде. Если в (6) мощности обоих факторов производства имеют унимодальные распределения Вейбулла, то экономически это означает устойчивое производство, остановка которого из-за малой мощности какого-либо фактора маловероятна. В противоположном случае, когда $0 < \nu_j \le 1$, распределение Вейбулла сосредоточено вблизи нулевого значения мощности *j*-го фактора производства. Если мощность хотя бы одного из факторов производства имеет в (6) такое распределение Вейбулла, то соответствующее производство оказывается неустойчивым и с высокой вероятностью может быть приостановлено из-за малой мощности соответствующего фактора, причем вероятность остановки производства из малой мощности *j*-го фактора производства тем больше, чем ближе значение параметра формы ν_j к нулю.

Подстановка закона распределения Вейбулла (6) в (3) приводит к следующей производственной функции:

$$\tilde{Q}\left(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(y/\lambda_1\right)^{\nu_1} - \left(y/\lambda_2\right)^{\nu_2}} dy\,. \qquad (7)$$

Если параметры формы ν_1 и ν_2 – это положительные рациональные числа, то интеграл, входящий в (7), может быть выражен через гипергеометрическую и другие специальные функции. Например, при $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 2$ получаем [7]:

$$\tilde{Q}\left(1,2,\lambda_1,\lambda_2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda_2 e^{-\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\right)^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\right) \equiv \tilde{Q}_2 e^{-\left(\frac{\tilde{Q}_2}{\sqrt{\pi}\tilde{Q}_1}\right)^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{Q}_2}{\sqrt{\pi}\tilde{Q}_1}\right), \tag{8}$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительная функция ошибок. Кроме того, интеграл, входящий в (7), вычисляется аналитически, если параметры формы совпадают, т. е. при $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$:

$$\tilde{Q}\left(\nu,\nu,\lambda_1,\lambda_2\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(\left(\lambda_1\right)^{-\nu} + \left(\lambda_2\right)^{-\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}}. \tag{9}$$

Этот последний случай особенно интересен, поскольку формула (9) определяет производственную функцию CES. Учитывая, что $\tilde{Q}_j \equiv \mathrm{E}\left(Q_j\right) = \lambda_j\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(j = 1,2\right)$, формуле (9) можно придать более простой вид, в точности совпадающий с классической формой записи производственной функции CES:

$$\tilde{Q}\left(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2\right) = \left(\left(\tilde{Q}_1\right)^{-\nu} + \left(\tilde{Q}_2\right)^{-\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}}. \tag{10}$$

Таким образом, производственная функция CES является элементом класса производственных функций Леонтьева (3). Она получается, если мощности обоих факторов производства, будучи независимыми случайными величинами, имеют распределения Вейбулла с одинаковым параметром формы.

Как уже говорилось ранее, все производственные функции Леонтьева являются однородными первого измерения. По этой причине функциям (7), (8) и (10) всегда можно придать вид $\tilde{Q}/\tilde{Q}_1 = g\left(\tilde{Q}_2/\tilde{Q}_1\right)$. На рис. 2 представлены графики функции $g\left(\tilde{Q}_2/\tilde{Q}_1\right)$ для двух различных законов распределения Вейбулла (6).

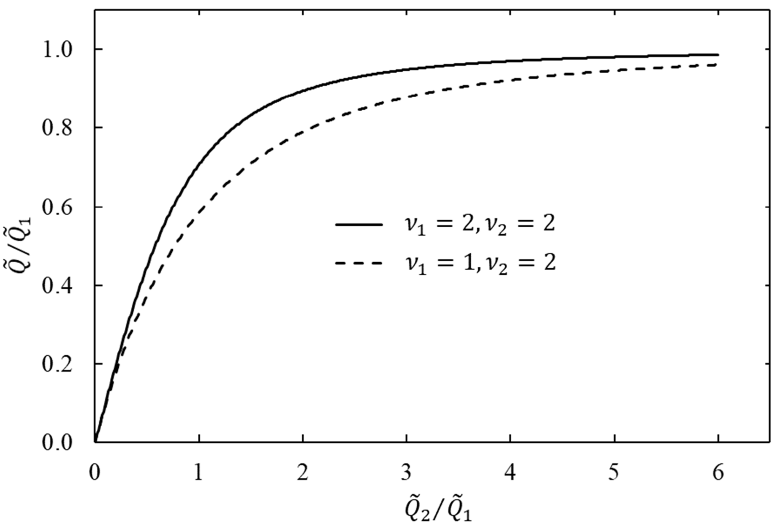

Рис. 2. Графики производственной функции (7), построенные для двух различных законов распределения Вейбулла (6): сплошная линия – производственная функция CES (10), пунктирная линия – производственная функция (8). Количество выпускаемой продукции $\tilde{Q}$ и средняя мощность второго фактора производства $\tilde{Q}_2$ выражены в единицах средней мощности первого фактора производства $\tilde{Q}_1$

Оба графика имеют вид кривых насыщения, обладающих такими свойствами неоклассических производственных функций, как монотонное возрастание, выпуклость и уменьшение предельной производительности факторов производства с ростом величины этих факторов [1, 6]. Кроме того, из рис. 2 видно, что, как и в случае распределения Парето (см. рис. 1), при достаточно большом отношении $\tilde{Q}_2 / \tilde{Q}_1$ (на рис. 2 при $\tilde{Q}_2 / \tilde{Q}_1 > 1$) существует следующая закономерность: чем меньше значения параметров формы ν_1 и ν_2 распределения Вейбулла, тем выше значение предельного продукта. Однако можно показать, что для любых ν_1 и ν_2 таких, что $\nu_1 < \nu$ и $\nu_2 < \nu$, при одних и тех же средних мощностях факторов производства, производственная функция CES (10) обеспечивает большее количество выпускаемой продукции, чем производственная функция (7). Поэтому, в отличие от случая распределения Парето (см. (5) и рис. 1), малые значения параметров формы распределения Вейбулла не являются более выгодными для экономики предприятия, т. к. выигрыш в предельном продукте, который они обеспечивают при больших мощностях факторов производства, нивелируется уменьшением количества выпускаемой продукции.

Обобщенный принцип производства Леонтьева. Линейная производственная функция

Линейная производственная функция $Q = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$, в отличие от AK-модели, функции Кобба – Дугласа, функции Леонтьева и производственной функции CES, не обладает свойством существенности факторов, входящих в нее. Если мощность какого-либо фактора равна нулю, линейная производственная функция дает ненулевое количество выпускаемой продукции. По этой причине линейная производственная функция не может принадлежать классу производственных функций Леонтьева (3). Чтобы выяснить, частью какого вероятностного класса производственных функций является линейная функция, сформулируем новый принцип производства, обобщающий принцип производства Леонтьева (2).

Предположим, что факторы, используемые при производстве продукции, являются частично взаимозаменяемыми. Это значит, что производство продукции возможно при наличии хотя бы одного из факторов производства. При этом учтем, что производство только за счет одного фактора может быть сопряжено с увеличением удельного значения этого фактора. Оба фактора будут использоваться в производстве совместно до тех пор, пока фактор, обладающий наименьшей мощностью, полностью не исчерпается. За это время будет произведено $\min(Q_1, Q_2)$ единиц продукции. Поскольку факторы частично взаимозаменяемы, после исчерпания одного из факторов производство не остановится, т. к. другого фактора осталось на $\max(Q_1, Q_2) - \min(Q_1, Q_2)$ единиц продукции. Однако из-за отсутствия одного из факторов произведены будут не все эти единицы продукции, а только их часть:

$$\bar{\alpha}\left(\max(Q_1, Q_2) - \min(Q_1, Q_2)\right),$$

где $\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha_{21}, \min(Q_1, Q_2) = Q_1 \\ \alpha_{12}, \min(Q_1, Q_2) = Q_2 \end{cases}$, $\alpha_{ij} \in [0,1]$ – доля остаточной мощности *i*-го фактора производства, которая будет преобразована в конечный продукт после исчерпания *j*-го фактора производства. Полное количество продукции при таком принципе производства равно

$$f(Q_1, Q_2) = \min(Q_1, Q_2) + \bar{\alpha}\left(\max(Q_1, Q_2) - \min(Q_1, Q_2)\right). \quad (11)$$

Формула (11) обобщает принцип производства Леонтьева (2) на случай частично взаимозаменяемых факторов производства. При этом если $\bar{\alpha} = 0$, то оба фактора являются существенными, невзаимозаменяемыми и (11) совпадает с принципом производства Леонтьева (2). Если же $\bar{\alpha} = 1$, то совместное использование обоих факторов не требуется: всю продукцию можно произвести только за счет того фактора, который обладает наибольшей мощностью.

Учитывая определение параметра $\bar{\alpha}$, принципу производства (11) можно придать следующий вид:

$$f\left(Q_1,Q_2\right)=\begin{cases}Q_1+\alpha_{21}\left(Q_2-Q_1\right),\ Q_1\le Q_2\\ Q_2+\alpha_{12}\left(Q_1-Q_2\right),\ Q_2<Q_1\end{cases}. \qquad (12)$$

Подставив (12) в вероятностное определение производственной функции (1), получим:

$$\tilde{Q}=\alpha_{12}\tilde{Q}_1+\alpha_{21}\tilde{Q}_2+\left(1-\alpha_{12}-\alpha_{21}\right)\int\limits_0^{+\infty}y_1\left(\int\limits_{y_1}^{+\infty}\left(\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1,y_2\right)+\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_2,y_1\right)\right)dy_2\right)dy_1. \qquad (13)$$

Вероятностный класс производственных функций (13) содержит в качестве элемента линейную производственную функцию. Действительно, при $\alpha_{12}+\alpha_{21}=1$ независимо от того, какова совместная плотность распределения вероятности $\varphi_{Q_1Q_2}\left(y_1,y_2\right)$, формула (13) принимает вид

$$\tilde{Q}=\alpha_{12}\tilde{Q}_1+\alpha_{21}\tilde{Q}_2. \qquad (14)$$

Равенство (14) в точности совпадает с классическим выражением для линейной производственной функции, если в последнем заменить количество выпускаемой продукции и мощности факторов производства их математическими ожиданиями.

Чтобы выяснить экономический смысл равенства $\alpha_{12}+\alpha_{21}=1$ и, следовательно, экономические условия производства, при которых наблюдается линейная функция (14), вычислим с помощью (12) предельные производительности мощностей обоих производственных факторов:

$$f'_{Q_1}=\begin{cases}1-\alpha_{21},\ Q_1\le Q_2\\ \alpha_{12},\ Q_2<Q_1\end{cases};\ f'_{Q_2}=\begin{cases}\alpha_{21},\ Q_1\le Q_2\\ 1-\alpha_{12},\ Q_2<Q_1\end{cases}. \qquad (15)$$

Как видно из равенств (15), предельная производительность мощности первого фактора производства при совместном использовании со вторым фактором равна $f'_{Q_1}=1-\alpha_{21}$. После исчерпания второго фактора предельная производительность f'_{Q_1} становится равной $f'_{Q_1}=\alpha_{12}$. Аналогично предельная производительность мощности второго фактора производства при совместном использовании с первым фактором равна $f'_{Q_2}=1-\alpha_{12}$, а после исчерпания первого фактора принимает значение $f'_{Q_2}=\alpha_{21}$. Для обоих факторов производства разность между значением его предельной производительности до исчерпания другого фактора и значением при совместном использовании обоих факторов составляет $\alpha_{12}+\alpha_{21}-1$. Это значит, что при $\alpha_{12}+\alpha_{21}=1$ обе предельные производительности перестают зависеть от соотношения между мощностями факторов производства и при любых Q_1, Q_2 равны

$$f'_{Q_1}=\alpha_{12};\ f'_{Q_2}=\alpha_{21}. \qquad (16)$$

Следовательно, равенство $\alpha_{12}+\alpha_{21}=1$ означает такой уровень взаимозаменяемости производственных факторов, при котором исчерпание одного из факторов не меняет предельную производительность мощности другого фактора: она остается точно такой же, как и до исчерпания, т. е. такой же, как при совместном использовании обоих факторов производства.

Таким образом, математическое ожидание количества продукции, выпускаемой в соответствии с принципом производства (11), (12), определяется линейной производственной функцией (14), только если предельные производительности мощностей обоих факторов производства остаются неизменными в течение всего времени производства и определяются равенствами (16). Очень важно, что этот результат не зависит от того, каково совместное распределение вероятностей случайных величин Q_1 и Q_2.

Из равенств (15) также следует, что при $\alpha_{12} + \alpha_{21} < 1$ предельная производительность f'_{Q_1} является невозрастающей функцией мощности первого фактора производства Q_1, а f'_{Q_2} является невозрастающей функцией мощности второго фактора Q_2. Это значит, что при выполнении неравенства $\alpha_{12} + \alpha_{21} < 1$ принцип производства (11), (12), а вместе с ним и все производственные функции (13) удовлетворяют условию Инады [1, 6], касающемуся убывания предельного продукта. В этом смысле равенство (13) при $\alpha_{12} + \alpha_{21} < 1$ определяет класс неоклассических производственных функций. В то же время при $\alpha_{12} + \alpha_{21} > 1$, как видно из (15), предельный продукт увеличивается с ростом мощностей факторов производства. В этом случае, с точки зрения неоклассической экономической теории, производственные функции (13) демонстрируют аномальное поведение: предельная производительность любого фактора производства растет с увеличением мощности этого фактора даже после полного исчерпания запасов другого фактора.

Распределение вероятностей количества выпускаемой продукции

У вероятностного определения (1) производственной функции имеется один недостаток: совместное распределение вероятностей мощностей факторов производства может оказаться таким, что математическое ожидание количества выпускаемой продукции не существует. В этом случае в качестве оценки среднего значения количества выпускаемой продукции *Q* необходимо использовать не математическое ожидание, а другие вероятностные характеристики: медиану, дробные моменты и т. д. Вычисление значений этих характеристик требует знания распределения вероятностей случайной величины *Q* [5].

Найти распределение вероятностей количества выпускаемой продукции несложно, если известен экономико-математический принцип производства, т. е. функция $f(Q_1, Q_2)$. В частности, сравнивая определение (3) вероятностного класса производственных функций Леонтьева с выражением для математического ожидания случайной величины *Q* через ее плотность распределения вероятностей $\varphi_Q(x)$ [5]: $\mathrm{E}(Q) = \int_0^{+\infty} x\varphi_Q(x)\,dx$, приходим к выводу, что плотность распределения вероятностей количества выпускаемой продукции на предприятиях, придерживающихся производственного принципа Леонтьева (2), равна

$$\varphi_Q(x) = \int_x^{+\infty} \left(\varphi_{Q_1Q_2}(x,y) + \varphi_{Q_1Q_2}(y,x)\right)dy\,. \qquad (17)$$

При известной плотности $\varphi_{Q_1Q_2}(x,y)$ совместного распределения вероятностей мощностей производственных факторов формула (17) дает полное вероятностное описание случайной величины *Q*. Например, в случае распределения Вейбулла (6) находим:

$$\varphi_Q(x) = \left(\frac{\nu_1 x^{\nu_1 - 1}}{\lambda_1^{\nu_1}} + \frac{\nu_2 x^{\nu_2 - 1}}{\lambda_2^{\nu_2}}\right) e^{-(x/\lambda_1)^{\nu_1} - (x/\lambda_2)^{\nu_2}} H(x \ge 0)\,. \qquad (18)$$

Интересно отметить, что плотность распределения вероятностей (18) при $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$ является распределением Вейбулла с параметром формы ν и параметром масштаба $\left((\lambda_1)^{-\nu} + (\lambda_2)^{-\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}}$. Таким образом, если производственная функция Леонтьева (3) совпадает с производственной функцией CES (10), то количество выпускаемой продукции, так же как и мощности факторов производства, имеет распределение Вейбулла с параметром формы ν. Благодаря этому свойству производственная функция CES занимает особое положение среди всех производственных функций Леонтьева.

Если производство реализовано в соответствии с обобщенным принципом Леонтьева (12), то, как следует из (13), плотность распределения вероятностей количества выпускаемой продукции равна

$$\varphi_Q(x) = \alpha_{12}\varphi_{Q_1}(x) + \alpha_{21}\varphi_{Q_2}(x) + (1 - \alpha_{12} - \alpha_{21})\int_x^{+\infty}\left(\varphi_{Q_1Q_2}(x, y) + \varphi_{Q_1Q_2}(y, x)\right)dy, \quad (19)$$

где $\varphi_{Q_1}(x) = \int_0^{+\infty}\varphi_{Q_1Q_2}(x, y)\,dy$, $\varphi_{Q_2}(x) = \int_0^{+\infty}\varphi_{Q_1Q_2}(y, x)\,dy$ – предельные плотности распределения вероятностей мощностей производственных факторов. При $\alpha_{12} + \alpha_{21} = 1$ формула (19) приобретает вид

$$\varphi_Q(x) = \alpha_{12}\varphi_{Q_1}(x) + \alpha_{21}\varphi_{Q_2}(x). \quad (20)$$

Из (20) следует, что в ситуации, когда производственная функция является линейной (см. (14)), плотность распределения вероятностей количества выпускаемой продукции представляет собой линейную комбинацию предельных плотностей распределения мощностей производственных факторов, т. е. вклады производственных факторов в конечный продукт являются некоррелированными. При этом доли этих вкладов равны: α_{12} для первого фактора производства и α_{21} для второго. Если $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, то (19) переходит в (17). В этом случае вклады факторов производства в конечный продукт являются строго коррелированными: производство прекращается сразу после того, как заканчиваются запасы фактора, имеющего минимальную мощность. В противоположном случае, т. е. при $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$, распределение вероятностей количества выпускаемой продукции (19) совпадает с распределением вероятностей максимальной из мощностей факторов производства:

$$\varphi_Q(x) = \int_0^x\left(\varphi_{Q_1Q_2}(x, y) + \varphi_{Q_1Q_2}(y, x)\right)dy. \quad (21)$$

С помощью (17), (19) можно вычислять не только точечные (моду, медиану, математическое ожидание и др.), но и интервальные оценки значения количества выпускаемой продукции, т. е. находить интервал значений случайной величины *Q*, в который она попадает с заданной вероятностью. Интервальное оценивание случайной величины *Q* открывает совершенно новые возможности в прогнозировании выпуска продукции за некоторый промежуток времени как на отдельном предприятии, так и в целой отрасли экономики.

Заключение

Вероятностное определение производственной функции (1), а также распределение вероятностей количества выпускаемой продукции (см. (17)–(21)) дают возможность описывать реальное производство продукции на каком-либо предприятии. Для этого необходимо использовать в (1) и в выражении для плотности распределения вероятностей случайной величины *Q* эмпирически определенные для данного предприятия экономико-математический принцип производства $f(Q_1, Q_2)$ и совместную плотность распределения вероятности мощностей факторов производства $\varphi_{Q_1Q_2}(y_1, y_2)$. Наличие производственной функции и распределения вероятностей количества выпускаемой продукции, адекватных реалиям производства на данном предприятии, позволит повысить эффективность менеджмента на этом предприятии, а само производство сделать более прибыльным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heathfield D. F.* Production functions. London: MacMillan, 1971. 91 p.
2. *Arrow K. J., Chenery H. B., Minhas B. S., Solow R. M.* Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // The Review of Economics and Statistics. 1961. V. 43. N. 3. P. 225–250.

3. *Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х.* Экономический рост / пер. с англ. А. Н. Моисеева, О. В. Капустиной. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 824 с.

4. *Heathfield D. F., Wibe S.* An Introduction to Cost and Production Functions. London: MacMillan Education Ltd., 1987. 193 p.

5. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороходов А. В. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

6. *Inada K.-I.* On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // The Review of Economic Studies. 1963. V. 30. N. 2. P. 119–127.

7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Статья поступила в редакцию 22.06.2021

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Андрей Вячеславович Михеев – канд. физ.-мат. наук, доцент; доцент кафедры высшей математики; Казанский национальный исследовательский технологический университет; Россия, 420015, Казань; veehima@gmail.com.

PROBABILISTIC APPROACH TO DETERMINING PRODUCTION FUNCTIONS

A. V. Mikheev

Kazan National Research Technological University,
Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation

Abstract. The article considers a probabilistic method for determining production functions. The method consists in finding the expected value of the function that determines the economic and mathematical principle of production. It is assumed that the factors of production and/or their specific values included in this function are random variables. It is shown that depending on the principle of production such averaging gives different probabilistic classes of production functions. Functions that are elements of the same class differ from each other in the probability distribution of the relations of production factors to their specific values. Two probabilistic classes of production functions are constructed. The first class is generated by the Leontief production principle, the second – by generalization of this principle for the case of partially or completely fungible factors of production. There are established the laws of probability distribution and the conditions, under which the linear combination of the AK-model and the Cobb-Douglas production function, as well as the CES production function, are elements of the class of Leontief production functions. It is shown that the linear production function belongs to the class of generalized Leontief production functions. The probability density functions of the products number for these two classes of production functions are found.

Key words: production function, factors of production, Leontief production function, Cobb-Douglas production function, AK-model of production function, CES production function, linear production function, probability density function, expected value.

For citation: Mikheev A. V. Probabilistic approach to determining production functions. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2021;4:82-94. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2021-4-82-94.

REFERENCES

1. Heathfield D. F. *Production functions*. London, MacMillan, 1971. 91 p.
2. Arrow K. J., Chenery H. B., Minhas B. S., Solow R. M. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 1961, vol. 43, no. 3, pp. 225-250.
3. Barro R. J., Sala-i-Martin X. I. *Economic Growth*. McGraw-Hill, 1995. 539 p. (Russ. ed.: Barro R. Dzh., Sala-i-Martin Kh. Ekonomicheskii rost / per. s angl. A. N. Moiseeva, O. V. Kapus-tinoi. M.: BINOM. Laboratoriia znanii, 2010. 824 s.).
4. Heathfield D. F., Wibe S. *An Introduction to Cost and Production Functions*. London, MacMillan Education Ltd., 1987. 193 p.
5. Koroliuk V. S., Portenko N. I., Skorokhodov A. V. i dr. *Spravochnik po teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistike* [Handbook on probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 640 p.
6. Inada K.-I. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. *The Review of Economic Studies*, 1963, vol. 30, no. 2, pp. 119-127.
7. Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I. *Integraly i riady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

The article submitted to the editors 22.06.2021

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrej V. Mikheev – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics; Kazan National Research Technological University; Russia, 420015, Kazan; veehima@gmail.com.