

УПРАВЛЕНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, АВТОМАТИЗАЦИЯ

DOI: 10.24143/2072-9502-2019-4-7-17
УДК 519.622.2

АНАЛИЗ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ЕГО ПРОТЕКАНИЯ

Д. А. Асадова

*Институт систем управления Национальной Академии Наук Азербайджана,
Баку, Азербайджан*

Представлен численный подход к решению задач оптимального управления процессами установления колебательных систем посредством краевых управлений. В отличие от обзорно рассмотренных работ других авторов по схожей тематике, задача установления колебательного процесса численно исследуется в некоторой временной окрестности требуемого режима, а в математической модели колебательной системы учитывается наличие силы трения. Приводятся схемы вывода основных формул, а также алгоритмы численного их решения методами оптимизации первого порядка. Получены соответствующие аналитические формулы для компонент градиента целевого функционала по управляющим воздействиям. Проводится сравнение минимального времени установления колебательного процесса как при оптимальном управлении им, так и при самоустановлении процесса. Приведены результаты численных экспериментов. Полученные результаты могут быть отнесены ко многим процессам, описываемым гиперболическими уравнениями.

Ключевые слова: колебательные системы, краевые управляющие воздействия, градиент целевого функционала, минимальное время установления колебательного процесса.

Для цитирования: Асадова Д. А. Анализ минимального времени стабилизации колебательного процесса при различных режимах его протекания // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 4. С. 7–17. DOI: 10.24143/2072-9502-2019-4-7-17.

Введение

Задачи управления колебательными процессами всегда привлекали внимание исследователей [1–16]. Большой вклад в исследование задач управления граничными условиями для классических гиперболических уравнений второго порядка был внесен В. А. Ильиным и его учениками [2–7]. В их работах установлены необходимые и достаточные условия существования управлений в зависимости от того, в каком соотношении находятся длина колебательной системы l и финальный момент времени T .

В работах В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [3], А. А. Никитина [4] получены аналитические решения задач граничного управления для простейшего одномерного волнового уравнения в классах сильных обобщенных решений для произвольного момента времени $T \geq l$. В работе [7] Г. Д. Чабакаури аналитически решена задача о наилучшем приближении к заданной цели.

В классах слабых обобщенных решений Л. Н. Знаменской были получены аналитические выражения граничных управлений для критического момента $T = l$ в работах [5, 6], а для моментов времени $T > l$ – в работе [13] авторами М. Gugat, G. Leugering и др.

В работе [17] Ф. П. Васильевым и Р. П. Ивановым был предложен общий метод приближенного решения задач быстродействия для весьма широкого класса линейных управляемых процессов в банаховых пространствах.

В работе [12] предложен численный метод приближенного построения оптимального управления процессом колебаний однородной струны за счет управления на концах. Вычислительные эксперименты проведены для различных режимов колебаний правого конца струны в случае, когда управляющие функции аппроксимируются полиномами Лежандра.

Задачи точечного управления для гиперболического уравнения были рассмотрены в [1, 8]. В [1] изучены задачи финитного управления. В работе Г. Ф. Кулиева [8] получены необходимые и достаточные условия оптимальности в виде вариационного неравенства для задачи точечного управления гиперболическим уравнением общего вида.

В работе [11] для управляемых процессов, описываемых гиперболическим уравнением, были получены конструктивные оценки в классах сильных и слабых обобщенных решений, позволяющие с помощью вариационного метода М. М. Потапова находить устойчивые приближенные решения задач граничного управления процессом перевода колебательной системы в требуемое состояние точно к заданному моменту времени T . Также для общего случая теоретическое исследование задач быстродействия с граничными управлениями начато в работе [15], в которой отмечается актуальность разработки соответствующих эффективных численных методов. В работах [14, 16] предложены численные методы решения некоторых задач оптимального управления для волнового уравнения.

В отличие от этих работ в данной работе задача установления колебательного процесса численно исследуется в некоторой временной окрестности требуемого режима. Кроме этого, в математической модели колебательной системы учитывается наличие силы трения. Поскольку рассматриваемым в качестве математической модели телеграфным уравнением описываются многие колебательные процессы, такие как неустановившееся движение жидкости в трубопроводах, процессы переноса электроэнергии в системах электропередач, колебательные движения струн, стержней, пластин, полученные результаты могут быть отнесены ко многим процессам, описываемым гиперболическими уравнениями.

Постановка задачи

Пусть движение колебательной системы с учетом сопротивления среды описывается следующим уравнением гиперболического типа [18] в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

где α – коэффициент сопротивления среды; $y = y(x, t)$ – функция состояния распределенной колебательной системы, т. е. ее отклонение от состояния равновесия.

Допустим, что до момента времени $t = 0$ колебательная система находилась в исходном стационарном состоянии:

$$y(x, 0) = \mu_0(x), \quad y_t(x, 0) = \xi_0(x) = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \leq 0. \quad (2)$$

Требуется перевести колебательную систему в конечное заранее заданное стационарное состояние:

$$y(x, T) = \mu_1(x), \quad y_t(x, T) = \xi_1(x) = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq T, \quad (3)$$

где T – время, после которого установится новый стационарный режим (3).

Здесь $\mu(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\mu_1(\cdot)$, $\xi_1(\cdot)$ – заданные функции.

Отметим, что в реальности добиться полного установления (стабилизации) колебательного процесса к какому-либо определенному моменту времени T практически невозможно (из-за погрешностей в работе измерительной техники), поэтому будем считать, что режим (3) достигнут, если выполняются условия

$$\begin{aligned} |y(x, T) - \mu_1(x)| &\leq \delta_1, \\ |y_t(x, T) - \xi_1(x)| &\leq \delta_2, \quad x \in (0, 1), \quad T \leq t \leq T + DT, \end{aligned} \quad (4)$$

где DT – определенный малый заранее заданный интервал времени после момента T установления процесса; δ_1, δ_2 – заданные положительные величины, определяемые в процентах от значений некоторого установившегося режима ($\mu_1(x), \xi_1(x)$).

В связи с этим будем рассматривать уравнение (1) на множестве $\Omega = [0 \leq x \leq 1] [0 \leq t \leq T + DT]$.

Управление процессом перевода колебательной системы осуществляется за счет краевых условий, т. е. изменением функции состояния на обоих концах колебательной системы:

$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

где $u_1, u_2 \in L_2[0, T + DT]$.

Замечание 1. Отметим, что т. к. управляющие функции $u_1(t), u_2(t)$ могут быть разрывными, нельзя говорить о решении начально-краевой задачи (1), (2), (5) в классическом смысле [18]. Поэтому везде в дальнейшем решение краевых задач будем понимать в обобщенном смысле [19].

Определение. Под решением краевой задачи (1), (2), (5), соответствующим управлениям $u_1(t), u_2(t) \in L_2[0, T + DT]$, будем подразумевать функцию $y = y(x, t) \in L_2(\Omega)$, имеющую следы $y(x, \cdot) \in L_2[0, T + DT]$ при всех $x \in [0, 1]$; $y(\cdot, t) \in L_2[0, 1]$ при всех $t \in [0, T + DT]$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Ω , а условиям (2) – в смысле равенства соответствующих следов функции y , и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} y(x, t) (\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t) - \alpha \Phi_t) dx dt + \int_0^1 \mu(x) \Phi_t(x, 0) dx - \\ &- \int_0^1 (\xi(x) + \alpha \mu(x)) \Phi(x, 0) dx - \int_0^{T+DT} (u_2(t) \Phi_x(1, t) - u_1(t) \Phi_x(0, t)) dt = 0, \end{aligned}$$

справедливого для всех функций $\Phi(x, t) \in W_2^2(\Omega)$ [2–7] таких, что $\Phi(0, t) = 0, \Phi(1, t) = 0$ при всех $0 \leq t \leq T$ и $\Phi(x, T + DT) = 0$ и $\Phi_x(x, T + DT) = 0$ при всех $0 \leq x \leq 1$, и для которых краевые условия и первое начальное условие выполняются в смысле равенства элементов из $L_2[0, T + DT]$ и $L_2[0, 1]$ соответственно, а второе начальное условие – в смысле равенства элементов из $W_2^1(0, 1)$.

Целью управления в данной задаче является наиболее быстрый перевод колебательной системы из состояния (2) в состояние (3) с учетом того факта, что достижение режима (3) возможно в смысле (4). В связи с этим рассматривается целевой функционал, состоящий из двух слагаемых: первого слагаемого – минимизируемого момента времени T , и второго слагаемого, отражающего факт установления колебательного процесса в смысле (4):

$$J(u, T) = T + \int_T^{T+DT} \int_0^1 \{r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 + r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2\} dx dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Величина DT – определенный заранее заданный интервал времени после момента T установления процесса; r_1, r_2 – заданные весовые коэффициенты.

Таким образом, требуется найти такие управляющие функции $u_1(t), u_2(t) \in L_2[0, T + DT]$ и оптимизируемый параметр T , при которых функционал (6) принимает минимальное значение.

Численный подход к решению задачи

Для решения задачи оптимального управления процессом установления колебательных систем, рассматриваемой в данной работе, предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка, основанные на применении аналитических формул градиента целевого функционала по управляющим параметрам.

Поставленная задача является задачей оптимального по быстродействию управления распределенной системой при заданных значениях функций состояния в момент окончания процесса T , который рассматривается как оптимизируемый параметр, и с управлением в краевых условиях. Для решения данной задачи могут быть применены два подхода. Согласно первому подходу можно рассматривать T как параметр и использовать двухуровневую оптимизацию: на верхнем уровне для определения оптимального времени проведения переходного процесса T^* применить какой-либо из методов одномерной оптимизации, а на нижнем уровне при заданных текущих значениях T для определения

$$J_T^* = J(u_T^*, T) = \min_u J(u, T)$$

решать задачу оптимального управления распределенной системой с фиксированным временем. Согласно второму подходу T рассматривается как компонента управления, и для нахождения ее оптимального значения применяется процедура одновременной совместной оптимизации T и $u(t)$. В данной работе применен второй подход.

Формулы градиента целевого функционала, выводимые ниже, могут быть использованы при получении необходимых условий оптимальности для рассмотренной задачи.

Формулы для градиента функционала по управляющим воздействиям

Формулы для компонент градиента функционала по краевым управлениям. Для получения формул градиента функционала по управлениям $u_i(t), i=1, 2, \dots$ дадим им приращения $\Delta u_i(t)$, т. е. рассмотрим допустимые управления $u_i(t), u_i(t) + \Delta u_i(t) \in L_2[0, T + DT]$.

Пусть $y(x, t; u_i), y(x, t; u_i + \Delta u_i)$ – решения краевой задачи (1), (2), (5), соответствующие этим управлениям. Обозначим управляющий вектор через $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, тогда $\Delta u(t) = (\Delta u_1(t), \Delta u_2(t)) \in L_2^2[0, T + DT]$.

Из (1), (2), (5) следует, что $\Delta y(x, t) = y(x, t; u + \Delta u) - y(x, t; u)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta y_{tt} - \Delta y_{xx} + \alpha \Delta y_t = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T + \Delta T); \quad (7)$$

$$\Delta y(x, 0) = 0, \quad \Delta y_t(x, 0) = 0, \quad \Delta y(0, t) = \Delta u_1(t), \quad \Delta y(1, t) = \Delta u_2(t). \quad (8)$$

Формула для приращения функционала (6), с учетом (7), (8), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_u J(u, T) &= J(u + \Delta u, T) - J(u, T) = \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) + \Delta y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dx dt - \\ &- \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dx dt + \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) + \Delta y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dx dt - \\ &- \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dx dt = \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)] \Delta y(x, t) dx dt + \\ &+ \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)] \Delta y_t(x, t) dx dt + R, \end{aligned} \quad (9)$$

где $R = r_1 \int_T^{T+DT} \int_0^1 (\Delta y(x, t))^2 dx dt + r_2 \int_T^{T+DT} \int_0^1 (\Delta y_t(x, t))^2 dx dt$.

Пользуясь результатами работы [19], можно доказать следующую оценку:

$$|R| \leq M \|\Delta u\|_{L_2^2[0, T+DT]}^2, \quad (10)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от $y(x, t)$ и $u(t)$.

Пусть функция $\psi(x, t)$ является обобщенным решением следующей вспомогательной сопряженной краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2r_1(y(x, t) - \varphi_{1T}(x)) - 2r_2 y_{tt}(x, t), & T \leq t \leq T + DT, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}, & 0 \leq t < T; \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad 0 \leq t < T + DT; \quad (12)$$

$$\psi(x, T + DT) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (13)$$

$$\psi_t(x, T + DT) = \alpha \psi(x, T + DT) - 2r_2 [y_t(x, T + DT) - y_t(x, T)], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Учитывая (7), (8), (11)–(14) в (9) и применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \Delta_u J(u, T) &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)] \Delta y(x, t) dx dt + \int_0^1 2r_2 [y_t(x, T + DT) - \xi_1(x)] \Delta y(x, T + DT) dx - \\ &\quad - \int_0^1 2r_2 [y_t(x, T) - \xi_1(x)] \Delta y(x, T) dx - \int_T^{T+DT} \int_0^1 2r_2 y_{tt}(x, t) \Delta y(x, t) dx dt + R = \\ &= \int_T^{T+DT} \int_0^1 (\psi_{tt} - \psi_{xx} - \alpha \psi_t) \Delta y(x, t) dx dt + \int_0^1 \int_0^T (\psi_{tt} - \psi_{xx} - \alpha \psi_t) \Delta y(x, t) dx dt - \\ &\quad - \int_0^1 \psi_t(x, T + DT) \Delta y(x, T + DT) dx dt + R = \int_0^1 \int_0^{T+DT} (\psi_{tt} - \psi_{xx} - \alpha \psi_t) \Delta y(x, t) dx dt - \\ &\quad - \int_0^1 \psi_t(x, T + DT) \Delta y(x, T + DT) dx dt + R = \int_0^1 \psi_t(x, T + DT) \Delta y(x, T + DT) dx dt + \\ &\quad + \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi(x, y) \Delta y_{tt}(x, t) dx dt + \int_0^{T+DT} \Delta u_1(t) \psi_x(0, t) dt - \int_0^{T+DT} \Delta u_2(t) \psi_x(1, t) dt - \\ &\quad - \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi(x, y) \Delta y_{xx}(x, t) dx dt + \int_0^{T+DT} \int_0^1 \alpha \psi(x, t) \Delta y_t(x, t) dx dt - \\ &\quad - \int_0^1 \psi_t(x, T + DT) \Delta y(x, T + DT) dx dt + R = \int_0^{T+DT} \int_0^1 \psi(x, y) (\Delta y_{tt}(x, t) - \Delta y_{xx}(x, t) + \alpha \Delta y_t) dx dt + \\ &\quad + \int_0^{T+DT} \Delta u_1(t) \psi_x(0, t) dt - \int_0^{T+DT} \Delta u_2(t) \psi_x(1, t) dt + R = \\ &= \int_0^{T+DT} \Delta u_1(t) \psi_x(0, t) dt - \int_0^{T+DT} \Delta u_2(t) \psi_x(1, t) dt + R. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) и оценки остаточного члена (10) следует, что функционал дифференцируем по $u(t)$ на $L_2^2[0, T + DT]$ и компоненты его градиента определяются по формулам

$$\text{grad}_{u_1} J(u, T) = \psi_x(0, t), \quad t \in [0, T + DT];$$

$$\text{grad}_{u_2} J(u, T) = -\psi_x(1, t), \quad t \in [0, T + DT].$$

Формулы для компонент градиента функционала по моменту времени T . Для получения формулы градиента функционала по моменту времени T будем считать, что параметр T является компонентой управления. Рассмотрим приращение функционала, соответствующее приращению конечного момента времени T , т. е. ΔT :

$$\begin{aligned}
 \Delta_T J(u, T) &= J(u, T + \Delta T) - J(u, T) = \Delta T + \int_{T+\Delta T}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt - \\
 &- \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+\Delta T}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt - \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt = \\
 &= \Delta T + \int_{T+\Delta T}^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+DT}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt - \\
 &- \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+\Delta T}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt - \int_T^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt = \\
 &= \Delta T + \int_{T+\Delta T}^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+DT}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt - \\
 &- \left(\int_T^{T+\Delta T} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+\Delta T}^{T+DT} \int_0^1 r_1 [y(x, t) - \mu_1(x)]^2 dxdt \right) + \int_{T+\Delta T}^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt + \\
 &+ \int_{T+DT}^{T+DT+\Delta T} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt - \left(\int_T^{T+\Delta T} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt + \int_{T+\Delta T}^{T+DT} \int_0^1 r_2 [y_t(x, t) - \xi_1(x)]^2 dxdt \right) = \\
 &\stackrel{\text{по теор. о среднем знач.}}{=} \Delta T + \Delta T \left(\int_0^1 r_1 \{ [y(x, T + DT) - \mu_1(x)]^2 - [y(x, T) - \mu_1(x)]^2 \} dx \right) + \\
 &\quad + \Delta T \left(\int_0^1 r_2 \{ [y_t(x, T + DT) - \xi_1(x)]^2 - [y_t(x, T) - \xi_1(x)]^2 \} dx \right) = \\
 &= \Delta T \left[1 + \int_0^1 r_1 (y(x, T + DT) + y(x, T) - 2\mu_1(x))(y(x, T + DT) - y(x, T)) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 r_2 (y_t(x, T + DT) + y_t(x, T) - 2\xi_1(x))(y_t(x, T + DT) - y_t(x, T)) dx \right].
 \end{aligned}$$

Разделив обе части на ΔT и перейдя к пределу при $\Delta T \rightarrow 0$, получим формулу компоненты градиента функционала по T

$$\begin{aligned}
 \text{grad}_T J(u, T) &= 1 + \int_0^1 r_1 (y(x, T + DT) + y(x, T) - 2\mu_1(x))(y(x, T + DT) - y(x, T)) dx + \\
 &+ \int_0^1 r_2 (y_t(x, T + DT) + y_t(x, T) - 2\xi_1(x))(y_t(x, T + DT) - y_t(x, T)) dx.
 \end{aligned}$$

Полученные формулы можно использовать, в частности, при применении градиентной процедуры одновременной совместной оптимизации вектора (u, T) , включающей метод Флетчера – Ривза для нахождения текущих значений управляющей вектор-функции $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ и метод скорейшего спуска – для значений оптимизируемого параметра T :

$$\begin{aligned}
 u^{k+1}(t) &= u^k(t) - \alpha_k q_k; \\
 T^{k+1} &= T^k - \alpha_k \frac{dJ}{dT^k}, \quad k = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

где $q_1 = \text{grad}_u J(u^1)$; $q_k = \text{grad}_u J(u^k) - \beta_k q_{k-1}$; $\beta_k = -\|\text{grad}_u J(u^k)\|^2 \|\text{grad}_u J(u^{k-1})\|^{-2}$; α_k – шаг одномерной минимизации, выбираемый из условия

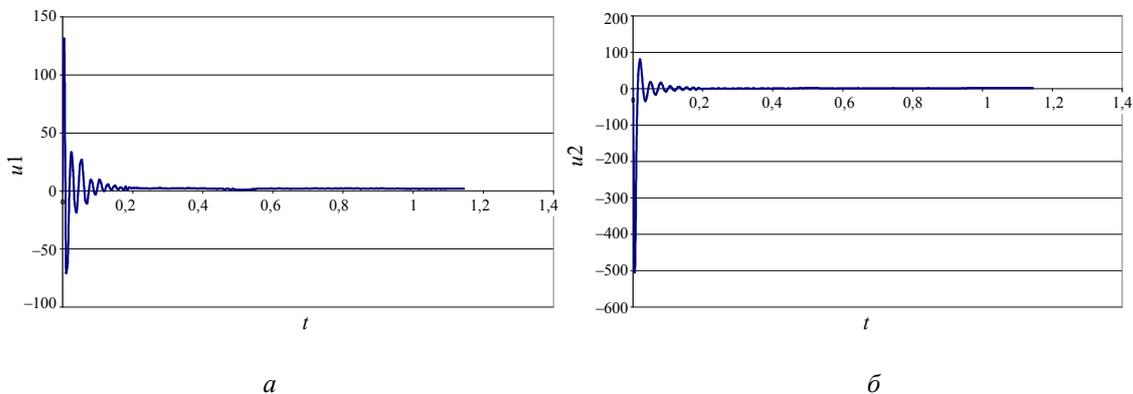
$$\alpha_k = \arg \min_{\substack{\alpha \geq 0 \\ u^k(t) \in L_2^2[0, T+DT]}} J\left(u^k(t) - \alpha q_k, T^k - \alpha \frac{dJ}{dT^k}\right).$$

Результаты численных экспериментов

Отметим (о чем уже говорилось во введении), что одним из основных теоретических результатов, полученных А. Г. Бутковским, В. А. Ильиным и его учениками, которые занимались вопросами граничного управления струной, являлся тот факт, что при управлении струной на двух концах минимальное время успокоения равно длине струны, а при управлении на одном конце – удвоенной длине струны.

В данной работе при численном решении задач граничного управления переходными процессами в колебательных системах без учета каких-либо ограничений на управления и фазовые переменные данные факты были подтверждены. При решении задачи в безразмерных переменных (т. е. при $0 \leq x \leq 1$) было установлено, что минимальное время установления переходного режима равнялось 1 (т. е. длине системы) при управлении на обоих концах колебательной системы, а при управлении на одном конце (на другом конце сразу осуществлялся переход на требуемый режим) оптимальное время составляло 2.

В безразмерных единицах значение скорости функции состояния при исходном режиме было взято равным 1, т. е. $\xi_0 = 1$, при конечном режиме – равным 2 (т. е. $\xi_1 = 2$), длина системы считалась равной 1. Управление осуществлялось изменением функции состояния на концах (допустим, струны, или какой-либо другой распределенной колебательной системы). Как видно из графиков, изображенных на рис., функции управления носят импульсный характер.



Графики оптимальных управлений при краевом управлении колебательной системой: оптимальное управление u_1 на левом конце (а); оптимальное управление u_2 на правом конце (б)

Так, функция управления на левом конце совершает резкий скачок вверх до 130 ед., затем вниз до -70 , а потом с амплитудой, уменьшающейся по абсолютной величине, совершаются колебания вверх и вниз где-то до $T \approx 0,4$, далее небольшие осцилляции продолжаются до полного установления (стабилизации) к моменту времени $T \approx 1$. Значения функции управления на правом конце сначала уменьшаются до -500 , затем увеличиваются до 70 , далее с небольшой амплитудой функция осциллирует до $T \approx 0,2$, после чего совершаются незаметные глазу небольшие колебания вплоть до момента полного установления при $T \approx 1$.

Естественно, что эти исследования носят чисто теоретический характер, поскольку при управлении реальными колебательными процессами необходимо учитывать ограничения на функции управления. Однако они дают возможность оценить вид оптимальной управляющей функции и выигрыш во времени по сравнению с тем, когда колебательная система устанавливается без оптимального управления ею. Известно, что при наличии силы трения колебательная система, выведенная из состояния равновесия, со временем установится сама по себе, такое

установление системы обычно называют самоустановлением (самостабилизацией). В работе для сравнения были также проведены вычислительные эксперименты по наблюдению за временем самоустановления системы. Колебательная система была выведена из состояния равновесия (при $\xi_0 = 1$) тем, что на границе (в данном случае, на левом и правом конце) была сразу переведена на конечный установившийся режим, т. е. на концах поддерживалось значение скорости функции состояния $\xi_1 = 2$ и проводилось наблюдение за временем установления, т. е. перехода к режиму (3) на всем протяжении системы при $\xi_1 = 2$.

В табл. приведены значения времени самоустановления колебательной системы при численном исследовании ее с помощью явных и неявных разностных схем (здесь h – шаг по пространственной переменной, τ – шаг по временной переменной).

Численные результаты решения задачи самоустановления переходных режимов колебательных систем с использованием различных схем аппроксимации

| h | τ | T | |
|------|--------|-------------|---------------|
| | | Явная схема | Неявная схема |
| 0,1 | 0,05 | 4,5 | 3,7 |
| | 0,08 | 4,5 | 3,7 |
| | 0,09 | 4,6 | 3,7 |
| | 0,1 | 4,6 | 3,7 |
| 0,05 | 0,01 | 3,8 | 3,7 |
| | 0,02 | 3,8 | 3,7 |
| | 0,03 | 4,6 | 3,7 |
| | 0,05 | 4,6 | 3,7 |
| | 0,1 | – | 3,7 |
| 0,01 | 0,005 | 3,8 | 3,7 |
| | 0,008 | 3,8 | 3,7 |
| | 0,009 | 4,6 | 3,7 |
| | 0,1 | – | 3,7 |

Из таблицы видно, что при решении краевой задачи с помощью неявной схемы (которая была использована и при расчете краевой задачи в решении задачи оптимального управления) время самоустановления системы составляло $T \approx 3,7$. Это в 3,7 раза превышает время установления системы при оптимальном управлении ею.

Все это показывает явные преимущества оптимального управления установлением (стабилизацией) колебательной системы.

Заключение

В работе было исследовано время установления (стабилизации) колебательной системы, совершающей переход от исходного установившегося состояния к конечному установившемуся состоянию, как при оптимальном управлении процессом установления, так и при самоустановлении системы; проведено сравнение полученных результатов. При решении задачи оптимального управления процессом установления колебательной системы предложен численный метод, в котором используются итерационные методы оптимизации первого порядка, основанные на применении аналитических формул градиента целевого функционала по управляющим воздействиям. В качестве управляющих воздействий рассматриваются краевые управления и минимизируемый параметр T .

Предложенный численный метод может быть применен при исследовании задач оптимального управления механическими колебаниями струн и стержней, колебаниями электромагнитного поля, распространением акустических волн и многими другими процессами.

Выполненные в работе исследования могут быть далее развиты в направлении разработки методов численного решения задач быстрого действия для волнового уравнения с управляющими воздействиями других типов, с управлениями, удовлетворяющими определенным ограничениям, а также для многомерных уравнений колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Т. Структурная теория распределенных систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
2. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

3. Ильин В. А., Мусеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 89–114.
4. Никитин А. А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1773–1782.
5. Знаменская Л. Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
6. Знаменская Л. Н. Управление колебаниями струны в классе обобщенных решений из L_2 // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 666–672.
7. Чабактури Г. Д. Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1655–1663.
8. Кулиев Г. Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 80–84.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые вопросы оптимального управления распределёнными системами // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 4. С. 55–68.
10. Айда-заде К. Р., Асадова Д. А. Исследование переходных процессов в нефтепроводах // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С. 156–172.
11. Иванов Д. А., Потапов М. М. Приближения к оптимальным по времени граничным управлениям для слабых обобщённых решений волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 4. С. 605–624.
12. Гибкина Н. В., Сидоров М. В., Стадникова А. В. Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны // Радиотехника. 2016. № 2. С. 3–11.
13. Gugat M., Leugering G., Sklyar G. L^p – optimal boundary control for the wave equation // SIAM Journal Control and Optimization. 2005. V. 44. N. 1. P. 49–74.
14. Ervedoza S., Zuazua E. Numerical approximation of exact controls for waves. New York: Springer, 2013. 122 p.
15. Loheac J., Zuazua E. Norm saturating property of time optimal controls for wave-type equations // IFAC - PapersOnLine. 2016. V. 49. N. 8. P. 37–42.
16. Kunisch K., Wachsmuth D. On time optimal control of the wave equation and its numerical realization as parametric optimization problem // SIAM Journal Control and Optimization. 2013. V. 51. N. 2. P. 1232–1262.
17. Васильев Ф. П., Иванов Р. П. О приближенном решении задачи быстрогодействия в банаховых пространствах при наличии ограничений на фазовые координаты // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11. № 2. С. 328–347.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
19. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

Статья поступила в редакцию 10.04.2019

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Асадова Джамиля Абульфаз кызы – Азербайджан, AZ 1141, Баку; Институт систем управления Национальной Академии наук Азербайджана; доцент; ведущий научный сотрудник отдела разработки численных методов принятия решений в детерминированных системах; jamilya_babaeva@rambler.ru.



ANALYSIS OF MINIMUM TIME BEFORE STABILIZATION OF OSCILLATORY PROCESS UNDER DIFFERENT MODES

J. A. Asadova

*Institute of Control Systems of the Azerbaijan Academy of Sciences,
Baku, Azerbaijan*

Abstract. The paper presents a numerical approach to solving the problems of optimal control over establishing oscillatory systems by means of boundary controls. In contrast to the reviewed works of other authors on similar topics, the problem of establishing the oscillatory process is numerically studied in a temporal neighborhood of the required mode, the friction force being taken into account in the mathematical model of the oscillatory system. The schemes of deriving

the basic formulas are presented, as well as algorithms for their numerical solution by first-order optimization methods. The corresponding analytical formulas for the components of the gradient of the target functional for control actions are obtained. A comparison is made of the minimum time for the oscillation process to be established both with its optimal control and with the process self-determination. The results of numerical experiments are presented. The results can be attributed to the different processes described by hyperbolic equations.

Key words: oscillatory systems, boundary control actions, gradient of target functional, minimal settling time of oscillatory process.

For citation: Asadova J. A. Analysis of minimum time before stabilization of oscillatory processes under different modes. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2019;4:7-17. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2019-4-7-17.

REFERENCES

1. Butkovskii A. T. *Strukturnaia teoriia raspredelennykh sistem* [Structural theory of distributed systems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 320 p.
2. Il'in V. A. Granichnoe upravlenie processom kolebaniia na dvukh koncakh v terminakh obobshchennogo resheniia volnogo uravneniia s konechnoi energiei [Boundary control of oscillation process on two ends in terms of generalized solution of wave equation with finite energy]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2000, vol. 36, no. 11, pp. 1513-1528.
3. Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimizatsiia granichnykh upravlenii kolebaniiami struny [Optimization of boundary controls for string vibrations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 2005, vol. 60, iss. 6, pp. 89-114.
4. Nikitin A. A. Optimal'noe granichnoe upravlenie kolebaniiami struny, proizvodimoe siloi pri uprugom zakreplenii [Optimal boundary control of string vibrations produced by force with elastic fastening]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1773-1782.
5. Znamenskaia L. N. *Upravlenie uprugimi kolebaniiami* [Elastic vibration control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 176 p.
6. Znamenskaia L. N. Upravlenie kolebaniiami struny v klasse obobshchennykh reshenii iz L2 [Control of string vibrations in class of generalized solutions from L2]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 666-672.
7. Chabakauri G. D. Optimizatsiia granichnogo upravleniia processom kolebaniia na odnom konce pri zakreplennom vtorom konce [Optimization of boundary control of oscillation process at one end with the second end fixed]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1655-1663.
8. Kuliev G. F. Zadacha tochechnogo upravleniia dlia giperbolicheskogo uravneniia [Point control problem for hyperbolic equation]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1993, no. 3, pp. 80-84.
9. Lionc Zh.-L. Nekotorye voprosy optimal'nogo upravleniia raspredelennymi sistemami [Some issues of optimal management of distributed systems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1985, vol. 40, iss. 4, pp. 55-68.
10. Aida-zade K. R., Asadova D. A. Issledovanie perekhodnykh processov v nefteprovodakh [Studying transient processes in oil pipelines]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2011, no. 12, pp. 156-172.
11. Ivanov D. A., Potapov M. M. Priblizheniia k optimal'nym po vremeni granichnym upravleniim dlia slabyykh obobshchennykh reshenii volnogo uravneniia [Approximations to time-optimal boundary controls for weak generalized solutions of wave equation]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2017, vol. 57, no. 4, pp. 605-624.
12. Gibkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova A. V. Optimal'noe granichnoe upravlenie kolebaniiami odnorodnoi struny [Optimal boundary control of vibrations of uniform string]. *Radiotekhnika*, 2016, no. 2, pp. 3-11.
13. Gugat M., Leugering G., Sklyar G. L^p – optimal boundary control for the wave equation. *SIAM Journal Control and Optimization*, 2005, vol. 44, no. 1, pp. 49-74.
14. Ervedoza S., Zuazua E. *Numerical approximation of exact controls for waves*. New York, Springer, 2013. 122 p.
15. Loheac J., Zuazua E. Norm saturating property of time optimal controls for wave-type equations. *IFAC – PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 8, pp. 37-42.
16. Kunisch K., Wachsmuth D. On time optimal control of the wave equation and its numerical realization as parametric optimization problem. *SIAM Journal Control and Optimization*, 2013, vol. 51, no. 2, pp. 1232-1262.
17. Vasil'ev F. P., Ivanov R. P. O priblizhennom reshenii zadachi bystrodeistviia v banakhovykh prostanstvakh pri nalichii ogranichenii na fazovye koordinaty [Approximate solution to performance problem in Banach spaces under limits on phase coordinates]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 328-347.

18. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 736 p.
19. Vasil'ev F. P. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002. 824 p.

The article submitted to the editors 10.04.2019

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Asadova Jamila Abulfaz – Azerbaijan, AZ 1141, Baku; Institute of Control Systems of the Azerbaijan Academy of Sciences; Assistant Professor; Leading Researcher of the Department of Development of Numerical Methods for Decision-making in Deterministic Systems; jamilya_babaeva@rambler.ru.

