Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 2
ISSN 2072-9502 (print), ISSN 2224-9761 (online)
Vestnik ASTU. Series: Management, computer science and informatics. 2022. № 2
ISSN 2072-9502 (print), ISSN 2224-9761 (online)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Научная статья
УДК 004.021
https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109

Численно-аналитический метод преобразований для анализа нелинейных математических моделей полиномиальной структуры

Сергей Евгеньевич Иванов[1 *], Андрей Дмитриевич Телевной[2]

[1, 2]Национальный исследовательский университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия, Serg_ie@mail.ru [*]

Аннотация. Рассматривается научная задача исследования математических моделей с полиномиальной нелинейностью, которые представлены системами нелинейных дифференциальных уравнений. Для исследования нелинейных динамических систем со многими степенями свободы полиномиальной структуры предложен численно-аналитический метод преобразования. В отличие от аналогов данный метод позволяет решать широкий спектр задач для нелинейных систем общей полиномиальной структуры при сокращении ресурсоемкости вычислений. Приведен алгоритм метода преобразований для исследования нелинейных динамических систем с m степенями свободы. Выполнено исследование устойчивости решения нелинейных динамических систем с m степенями свободы. Приведены алгоритмические формулы метода преобразований для решения систем с нелинейностью четвертой степени. Вычислительные эксперименты по решению систем дифференциальных уравнений с малой нелинейной частью в форме многочлена шестой степени методом преобразований подтверждают точность четвертого порядка при вычислении. Представленным методом преобразований исследована нелинейная математическая модель виброзащитной системы. Доказана теорема об определении методом преобразований стационарного состояния для систем дифференциальных уравнений полиномиальной структуры. Представлены алгоритмические формулы метода для вычисления и общая матричная форма для векторных индексов. Для экономичного вычисления правых частей полиномиальной структуры представлены формулы и предложено применить схему Пана с предварительной обработкой коэффициентов. Метод позволяет исследовать различные режимы динамики нелинейных моделей, например, определять такие экстремальные режимы, как резонанс, субгармонический, полигармонический режим. В качестве примера применения метода решена задача виброзащиты вышки управления полетами от внешних периодических воздействий. Решение, построенное методом преобразований, учитывает все нелинейные компоненты полиномов. Метод позволяет выполнять исследование динамики широкого круга нелинейных систем с необходимой точностью.

Ключевые слова: метод преобразований, нелинейные динамические системы, математическая модель полиномиальной структуры, устойчивость решения систем, численно-аналитические методы

Для цитирования: *Иванов С. Е., Телевной А. Д.* Численно-аналитический метод преобразований для анализа нелинейных математических моделей полиномиальной структуры // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 2. С. 97–109. https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109.

Original article

Numerical-analytical transformation method of analyzing nonlinear mathematical models with polynomial structure

Sergei E. Ivanov[1] *, Andrey D. Televnoy[2]

[1, 2]ITMO University,
*Saint-Petersburg, Russia, Serg_ie@mail.ru **

Abstract. The article considers a scientific problem of investigating mathematical models with polynomial nonlinearity, which are represented by systems of nonlinear differential equations. There is presented a numericall-analytical transformation method for investigating nonlinear dynamical systems with many degrees of freedom of polynomial structure. As opposed to the analogues, this method allows solving a wide range of problems for nonlinear systems of general polynomial structure while reducing the computational resource intensity. An algorithm of the method of transformations for investigating the nonlinear dynamic systems with m degrees of freedom is given. The research of stability of solutions of nonlinear dynamic systems with m degrees of freedom is carried out. Algorithmic formulas of transformation method for the solution of systems with nonlinearity of the fourth degree are given. Computational experiments on solving systems of differential equations with a small nonlinear part in the form of a multinomial of the sixth degree using the transformation method show fourth order accuracy in computation. A nonlinear mathematical model of the vibration protection system is investigated by the presented method of transformations. The theorem on determination of the stationary state for systems of differential equations of polynomial structure by transformation method is proved. Algorithmic formulas for computation are presented. A general matrix form for vector indices is presented. Formulas for economical computation of right-hand sides of polynomial structure are presented and it is proposed to apply Pan's scheme with coefficient preprocessing. This method allows studying the different modes of nonlinear models dynamics, for example, to determine such extreme modes as resonance, sub-harmonic, and polyharmonic modes. As an example of the method application, the vibration protection problem of the tower from external periodic influences was solved. The transformed solution takes into account all nonlinear polynomial components. The method allows to investigate the dynamics of a wide range of nonlinear systems with the necessary accuracy.

Keywords: method of transformations, nonlinear dynamic systems, mathematical model of polynomial structure, stability of system solution, numerical and analytical methods

For citation: Ivanov S. E., Televnoy A. D. Numerical-analytical transformation method of analyzing nonlinear mathematical models with polynomial structure. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2022;2:97-109. (In Russ.) https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109.

Введение

Рассматривается научная задача исследования математических моделей с полиномиальной нелинейностью, которые представлены системами нелинейных дифференциальных уравнений. Для исследования таких нелинейных моделей разрабатывается метод преобразований. Традиционные методы исследования нелинейных систем, например преобразование к линейной форме, не учитывают влияние нелинейностей, приводят к упрощению модели и существенным погрешностям. Классические методы исследования нелинейных математических моделей были предложены в работах А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Ван дер Поля, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, А. А. Андронова и др. Применяются аналитические приближенные методы малого параметра, усреднения, Крылова–Боголюбова, линеаризации, метод Ван дер Поля, метод гармонического баланса, метод возмущений Пуанкаре, асимптотические методы растянутых параметров и многих масштабов. Каждый метод предназначен для решения определенного класса задач с введенными ограничениями. Например, метод усреднения не учитывает квадратичные составляющие, методы Ван дер Поля и линеаризации не учитывают кубические составляющие. Определенная ограниченность области решения является значительным недостатком применения приближений Чебышева при построении решений нелинейных дифференциальных уравнений. С целью снижения ресурсоемкости решений задачи при использовании приближенных методов критически важно правильно определить начальное приближение [1]. Побочным эффектом некорректного определения начального приближения является не только ощутимое повышение трудоемкости вычислительного алгоритма, но и невысокая точность решения.

Приведем обзор актуального состояния научных исследований в рассматриваемой области. В работе [2] нашло отражение использование методики нахождения полиномиальных решений канонических уравнений. Данная методика основана на разложении решений в ряды по базисным функциям. Далее, дополнительные решения могут находиться путем комбинирования решений, полученных ранее на предыдущих этапах. Подобная аппроксимация искомого решения легла в основу численно-аналитического метода, представленного автором [2]. Существенным преимуществом такого подхода является то, что решение представляется «…в форме непрерывной дифференцируемой по области решения, удовлетворяющих по точности аппроксимаций» [2, с. 204].

Авторы [3] посвятили свою работу исследованию решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Данные уравнения являются уравнениями с выделенной главной положительно однородной частью. Работа обладает выраженной практической значимостью, т. к. ее результаты позволяют обобщать решения для подобных систем.

Один из методов численно-аналитического описания решения уравнения объекта представлен в работе [4]. Помимо описания собственно решения в работе также вычисляются значения числовых характеристик на основе некорректных наблюдений. По мнению авторов, внедрение предложенного метода «…позволит алгоритмическими и программными средствами оперативно находить оптимальные оценки числовых характеристик движения объекта» [4, с. 11].

Одна из сфер применения численно-аналитического моделирования описана в работе [5]. Авторами была изучена сфера систем массового обслуживания поликомпонентных потоков. Построенные три математические модели и разнообразные области их применения являются существенным достоинством данной работы, а полученные численные результаты помогают рассчитать необходимое количество устройств для систем массового обслуживания поликомпонентных потоков.

Нахождение базисных функций с помощью численно-аналитического метода изучается в работе [6]. Предложенный авторами подход «…заключается в построении конечного элемента, учитывающего особенности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в окрестности угловых точек» [6, с. 325]. В результате удалось значительно повысить точность решения из-за сокращения порядка системы уравнений.

В качестве еще одного варианта применения численно-аналитических методов следует упомянуть работу авторов [7], в основу которой лег метод поиска близких к периодическим решений, соответствующих режимам авторотации механической системы. Подход, являющийся родственным методу Андронова–Понтрягина, позволяет строить решения вспомогательных подсистем. В результате получается набор периодических функций при выполнении условия сходимости метода.

Современными проблемами исследования нелинейных моделей занимается коллектив Института прикладной математики РАН им. М. В. Келдыша. В работе [8] представлена процедура построения разложения базиса решений одного четырехчленного рекуррентного соотношения с коэффициентами из кольца. Показано, что вне зоны близких собственных значений получаемое разложение является асимптотическим.

Авторы [9] рассматривают метод решения жестких систем дифференциальных уравнений на основе вычисления матричной экспоненты. В работе представлен метод контроля точности в случае линейных задач, приведены результаты численных расчетов для линейных и нелинейных задач.

Дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее большой параметр, рассматривается в [10]. Авторами описан предложенный ранее способ, являющийся альтернативой методу Пуанкаре (теорема о неявной функции). Мотивом к данному исследованию послужило желание авторов изучить влияние применения метода Пуанкаре в сингулярно возмущенной задаче.

Сравнение методов построения многослойных приближенных решений дифференциальных уравнений на основе классических приближенных методов выполняется в работе [11]. Варианты реализации алгоритмов расчета переходных процессов для динамических систем с применением операторного метода рассматриваются в работе [12]. В работе [13] асимптотическими методами исследуются полиномиальные дифференциальные уравнения. Рассматривается разложение по степеням независимой переменной, коэффициенты которого есть ряды Лорана по убывающим степеням логарифма. В работе [14] рассматриваются численно-аналитические методы поиска периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Представлены алгоритмы отыскания начальных условий, соответствующих периодическому решению. В исследовании [15] приводится доказательство теоремы о сходимости формального решения обыкновенных дифференциальных уравнений при случае, когда «множество показателей степени ряда имеют одну комплексную образующую» [15, с. 2]. В работе [16] доказана теорема о разрешимости нелинейной системы уравнений относительно приближенных значений коэффициентов Чебышева старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение. Авторам [17] для определения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений используется метод логистической функции.

В работах научного коллектива под руководством профессора Г. И. Мельникова предложен метод дифференциальных неравенств и применение приближений Чебышева для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений. В работе [18] рассматривается система дифференциальных уравнений полиномиальной структуры. Проводится преобразование уравнений и исследование колебаний объекта с постоянными параметрами. Приводятся оценки движения, полученные методом дифференциальных неравенств для положительных функций Ляпунова. В [19] рассматривается уравнение автономной динамической системы с одной степенью свободы. Применяется асимптотический метод преобразования Пуанкаре–Дюлака и приближения Чебышева для многочленов высокой степени. Исследуются механические системы в случае отсутствия внутренних резонансов.

Развитие численно-аналитических методов исследований поведений систем нашло свое отражение в работе [20]. Авторами рассматривается случай, при котором наблюдения содержат отсчеты сингулярной помехи. Предложенное улучшение метода позволяет определять оптимальные несмещенные и инвариантные оценки. Достоинством такого подхода является то, что он помогает избежать расширения пространства состояний.

В рассмотренных научных работах предложены методы для решения определенного класса задач при выполнении заданных условий. В отличие от рассмотренных научных работ в статье предложен метод, позволяющий решать широкий класс задач для нелинейных систем общей полиномиальной структуры при сокращении ресурсоемкости вычислений.

Постановка задачи исследования

Рассматривается актуальная задача разработки оптимального алгоритма для метода исследования нелинейных моделей. Для увеличения точности исследования нелинейных моделей разрабатывается метод преобразований. Метод позволяет исследовать различные режимы динамики нелинейных моделей, например, определять такие экстремальные режимы, как резонанс, субгармонический, полигармонический режим. Так, традиционные численные методы Рунге–Кутта с фиксированным шагом не определяют эффект мгновенного скачка. Для современных систем управления в реальном времени динамическими системами задача своевременного определения и устранения экстремальных режимов является актуальной. При разработке алгоритма метода также решается важная задача сокращения вычислительных ресурсов по сравнению с аналогичными классическими методами.

Метод преобразований для исследования нелинейных динамических систем с *m* степенями свободы

Рассмотрим динамическую систему с m степенями свободы. Для такой системы математическая модель представлена m нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными и периодическими коэффициентами.

Представим систему в матричной форме с применением векторного индекса $n = [n_1, n_2, \dots, n_{2m+2}]$ с целочисленными неотрицательными компонентами.

Обозначим $|n| = n_1 + n_2 + \dots + n_{2m+2}$ – сумму компонентов векторного индекса. Математическую модель системы запишем в матричном виде:

$$I\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = H_1\cos(\omega t) + H_2\sin(\omega t) + \sum_{|v|=2}^{k} h_v \cos^{v_1}(\omega t)\sin^{v_2}(\omega t)\, q_1^{v_3} \dots q_m^{v_{m+2}} \dot{q}_1^{v_{m+3}} \dots \dot{q}_m^{v_{2m+2}}, \quad (1)$$

где I – единичная матрица $m \times m$; B, C – квадратные матрицы $m \times m$; $H_1 = [h_{11}, h_{21}, \dots, h_{m1}]^T$; $H_2 = [h_{12}, h_{22}, \dots, h_{m2}]^T$; $h_n = [h^1{}_n, h^2{}_n, \dots, h^m{}_n]^T$ – вектор-столбец нелинейных коэффициентов, $|h^s{}_n| < 1$; t – время; ω – частота; q_i – обобщенные координаты системы; $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ – вектор-столбец искомых функций; $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m]^T$ – вектор-столбец производных.

Предположим, что для системы дифференциальных уравнений (1) выполнены условия теоремы Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши. Правая часть системы определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Для представления суммы по векторному индексу в работе [21] предложено применять последовательное раскрытие вложенных сумм вида

$$\sum_{|n|=2}^{k} j_v = \sum_{i_{2m+2}=2}^{k} \sum_{i_{2m+1}=0}^{i_{2m+2}} \dots \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} j_{i_1, i_2-i_1, i_3-i_2, \dots, i_{2m+2}-i_{2m+1}}.$$

Основные этапы метода преобразований включают представление нелинейной системы в нормальной форме, линейное и многочленное преобразование, решение преобразованной системы. В алгоритме введено условие комплексно-сопряженных корней с малыми отрицательными вещественными частями $\lambda_s, \bar{\lambda}_s$, $s = 1, \dots, m$ для уравнения $\mathrm{Det}\left[I\lambda^2 + B\lambda + C\right] = 0$.

Вводятся новые переменные $x_1 = \exp(i\omega t)$ и $x_2 = \exp(-i\omega t)$.

Представим периодические функции через введенные дополнительные переменные: $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ и $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2)$.

Приведем систему уравнений (1) к нормальной форме, дополнив введенными переменными:

$$\dot{X} = PX + \sum_{|n|=2}^{k} p_n x_1^{n_1} x_2^{n_2} q_1^{v_3} \dots q_m^{v_{m+2}} \dot{q}_1^{v_{m+3}} \dots \dot{q}_m^{v_{2m+2}}, \quad (2)$$

где $X = [x_1 x_2 q_1 q_2 \dots q_m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_m]^T$; P – квадратная матрица $(2m+2) \times (2m+2)$; p_n – комплексные коэффициенты нелинейной части, определяемые посредством перегруппировки членов нелинейных частей системы (1).

Выполним линейное преобразование системы:

$$Y = LX,$$

где Y – вектор-столбец новых обобщенных координат системы; L – квадратная матрица линейного преобразования.

Определяем невырожденную матрицу L.

В результате линейного преобразования представим систему в виде

$$\dot{Y} = \Lambda Y + \sum_{|n|=2}^{k} r_n y_1^{n_1} \dots y_{2m+2}^{n_{2m+2}},$$

где y_1, y_2 – новые обобщенные координаты системы. Здесь матрица Λ диагонального вида $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}]$ с комплексно-сопряженными корнями

$$\lambda_{2S} = \bar{\lambda}_{2S-1},\ s = 1, ..., m+1.$$

Для нахождения нелинейных коэффициентов r_ν выполним перегруппировку членов в нелинейной части (2) после линейного преобразования.

На следующем этапе выполняется преобразование

$$y_S = z_S + \sum_{|n|=2}^{k} a_n^S z_1^{n_1} \dots z_{2m+2}^{n_{2m+2}},$$
$$s = 3, \dots, 2m+2;\ y_S = z_S, (s = 1, 2), \quad (3)$$

где y_s – обобщенные координаты системы; z_s – преобразованные обобщенные координаты системы; a_n^S – коэффициенты преобразования.

Результатом преобразования (3) является система

$$\dot{z}_S = \lambda_S z_S + \sum_{|n|=2}^{k} q_n^S z_1^{n_1} \dots z_{2m+2}^{n_{2m+2}}; \quad s = 1, ..., 2m+2,$$

где q_n^S – коэффициенты преобразованной системы.

Для нахождения особых значений индекса $n = [n_1, n_2, \dots, n_{2m+2}]$ решаются уравнения [22]

$$\lambda_1 \nu_1 + \dots + \lambda_{2m+2} \nu_{2m+2} - \lambda_s = 0;$$
$$n_1 + n_2 + \dots + n_{2m+2} = 2, 3, ..., k;\ s = 1, ..., 2m+2. \quad (4)$$

Для не особых значений индексов $q_n^s = 0$ определяются a_n^s, для особых значений индексов $a_n^s = 0$ определяются q_n^s.

В работе [21] представлена итерационная формула для вычисления коэффициентов q_n^s и a_n^s:

$$\sum_{|n|=2}^{r} q_n^S Z^n + \sum_{|n|=2}^{r} \left(a_n^S Z^n \left(\sum_{k=1}^{2m+2} \lambda_k \nu_k - \lambda_S\right)\right) +$$
$$+ \sum_{k=3}^{2m+2} \sum_{|n|=2}^{r} a_n^S Z^n \nu_k z_k^{-1} \sum_{|\mu|=2}^{r} q_\mu^k Z^\mu = P_S(Z).$$

Введем комплексно-сопряженные переменные

$$z_{2S-1} = u_{2S-1} \exp(\mathrm{it\, Im}\lambda_{2S-1});\ z_{2S} = \bar{u}_{2S-1} \exp(-\mathrm{it\, Im}\lambda_{2S-1});\quad s = 1, .., m+1. \quad (5)$$

В результате перехода к переменным (5) получим автономную систему

$$\dot{u}_S = u_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=2}^{k} q_n^S u_1^{\nu_1} \bar{u}_1^{\nu_2} \dots u_{2S-1}^{\nu_{2S-1}} \bar{u}_{2S-1}^{\nu_{2S}}. \quad (6)$$

Далее получаем решение автономной системы.

Для перехода к автономной системе с вещественными коэффициентами выполним экспоненциальную замену переменных:

$$u_S = \rho_S \exp(i\theta_S). \quad (7)$$

Представим систему (6) с вещественными коэффициентами в виде

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S +$$
$$+ \sum_{|n|=2}^{k} \rho_1^{n_1+n_2} \dots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Re}\left(q_n^S \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right)\right); \quad (8)$$
$$\rho_S \dot{\theta}_S = \sum_{|n|=2}^{k} \rho_1^{n_1+n_2} \dots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Im}\left(q_n^S \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right)\right)$$

В нерезонансном случае система (8) имеет более простой вид:

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=2}^{k} \rho_1^{n_1+n_2} \dots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Re}(q_n^S);$$
$$\rho_S \dot{\theta}_S = \sum_{|n|=2}^{k} \rho_1^{n_1+n_2} \dots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Im}(q_n^S).$$

Проинтегрировав систему, найдем амплитуду ρ_S и частоту θ_S для преобразованных обобщенных координат системы. Установившийся режим найдем, приравнивая правые части (8) к нулю и решая систему алгебраических уравнений. Для представления решения в исходных переменных подставим решение в (3), (5) и (7). Решение в искомых переменных X найдем по формулам обратной замены: $X = L^{-1}Y$.

Методом преобразований исходная нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными и периодическими параметрами преобразуется к автономному виду. Для экономичного вычисления правых частей полиномиальной структуры предложено применить схему Пана с предварительной обработкой коэффициентов. Методы экономичного вычисления полиномов с предварительной обработкой коэффициентов представлены в работах В. Я. Пана [23]. В соответствии с двухэтапной схемой Пана для вычисления полинома n-й степени при $n \geq 5$ необходимо $\frac{n}{2}+2$ умножений и $n + 1$ сложений. Двухэтапная схема экономичного вычисления Пана с предварительной обработкой коэффициентов позволяет в 2 раза сократить количество операций умножения при вычислении полиномов, что приводит к значительному увеличению производительности вычисления полиномов.

Для вычислений особых индексов в алгоритме метода преобразований удобно применить матричную форму представления особых индексов.

Введем ленточную матрицу M_I из единиц, размерностью $(m+1) \times (2m+2)$.

$$M_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждая строка матрицы представляет векторный индекс.

Для получения особых индексов для каждого s построим сумму ленточной матрицы M_I из единиц и матрицы I_S с s – столбцом из единиц: $M_{IS} = M_I + I_S$.

Для $s = 2m+1$ получим матрицу для определения особых индексов вида

$$M_{I(2m+1)} = M_I + I_{2m+1} =$$
$$= M_I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В нерезонансном случае система (4) для вычисления особых индексов $(n_1, n_2, \ldots, n_{2m+2})$ имеет следующий вид:

$$\operatorname{Im}\lambda_1(n_1 - n_2) + \operatorname{Im}\lambda_3(n_3 - n_4) + \ldots + \operatorname{Im}\lambda_{2m+1}(n_{2m+1} - n_{2m+2}) - \operatorname{Im}\lambda_s = 0;$$
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{2m+2} = 2,\ 3,\ 4;\ s = 1, \ldots, 2m+1.$$

Подстановка значений векторных индексов (строк матриц M_{IS}) в систему уравнений для $s = 1, \ldots, 2m+1$ доказывает правильность построения матричных форм определения особых индексов.

Каждая строка матрицы $M_{I(2m+1)}$ представляет особый векторный индекс.

С учетом того, что сумма особых индексов определяет степени мономов в преобразованной системе дифференциальных уравнений и равенства $\rho_1 = \rho_2 = \rho_1^{n_1} = \rho_2^{n_2} = 1$, в каждом дифференциальном уравнении преобразованной системы присутствуют только мономы первой и третьей степени от искомых переменных.

Методом преобразований система приводится к автономному виду. Для автономных дифференциальных уравнений решения асимптотически приближаются к стационарному состоянию. При устойчивом стационарном состоянии малые отклонения не выводят систему из малой окрестности стационарного состояния. Для устойчивого стационарного состояния необходимо условие отрицательности вещественных частей характеристического уравнения.

Приведем теорему об определении стационарного состояния системы.

Теорема 1. При условии существования устойчивого стационарного состояния для системы m дифференциальных уравнений второго порядка в нерезонансном случае с малыми нелинейными частями в форме многочленов четвертых степеней существует система m линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, полученная в результате многочленных преобразований, которая определяет стационарное состояние системы.

Доказательство. Представим доказательство для системы m нелинейных уравнений второго порядка.

Исследуем систему m уравнений второго порядка с малыми нелинейными частями, представленными многочленами четвертой степени. В случае отсутствия резонансов автономная преобразованная система (8) имеет следующую форму:

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=2}^{4} \mathrm{Re}\left(q_n^S\right) \rho_3^{n_3+n_4} \ldots \rho_{2m+1}^{n_{2m+1}+n_{2m+2}}; \quad s = 3, \ldots, 2m+1;$$

$$\rho_S \dot{\theta}_S = \sum_{|n|=2}^{4} \rho_3^{n_3+n_4} \ldots \rho_{2m+1}^{n_{2m+1}+n_{2m+2}} \mathrm{Im}\left(q_n^S\right).$$

Для определения особых индексов запишем матричные формы при $s = 3, \ldots, 2m+1$:

$$M_{I(2m+1)} = M_I + I_{2m+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждая строка матрицы представляет особый векторный индекс. Для суммы особых индексов выполняются равенства $\sum_{i=3}^{2m+2} n_i = 3$ при $n_1 = n_2 = 0$, $\sum_{i=3}^{2m+2} n_i = 1$ при $n_1 = n_2 = 1$.

С учетом того, что сумма особых индексов определяет степени мономов в преобразованной системе дифференциальных уравнений и равенства $\rho_1 = \rho_2 = \rho_1^{n_1} = \rho_2^{n_2} = 1$, в каждом уравнении преобразованной системы присутствуют только мономы первой и третьей степени от искомых переменных. Для определения стационарного решения разделим на ρ_S первое уравнение (8), приравняем правые части к нулю, получим систему m алгебраических уравнений

$$\mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=2}^{4} \mathrm{Re}\left(q_n^S\right) \rho_3^{n_3+n_4} \ldots \rho_{2m+1}^{n_{2m+1}+n_{2m+2}} \rho_S^{-1} = 0; \quad s = 3, \ldots, 2m+1.$$

При делении на ρ_S степени мономов понизились на единицу, и в уравнении присутствуют только мономы нулевой (свободные члены) и второй степени от искомых переменных.

Проведя квадратичную замену переменных $r_S = \rho_S^2$, получаем линейную систему m алгебраических уравнений $s = 3, \ldots, 2m+1$ с вещественными коэффициентами вида

$$\mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=3} \mathrm{Re}\left(q_n^S\right) r_3^{n_3} r_5^{n_5} \ldots r_S^{n_S-1} \ldots r_{2m+1}^{n_{2m+1}} = 0; \quad s = 3, \ldots, 2m+1.$$

В линейной системе алгебраических уравнений будут присутствовать только мономы нулевой и первой степени в соответствии с равенствами для особых индексов: $\tau = n_3 + n_5 + \ldots + n_S - 1 + \ldots + n_{2m+1}$, $\tau = 1$ при $n_1 = n_2 = 0$; $\tau = 0$ при $n_1 = n_2 = 1$.

Таким образом, теорема доказана и методом преобразований определена система линейных алгебраических уравнений.

Получив стационарные значения ρ_S, из второго уравнения (8) определим θ_S:

$$\theta_S = t \sum_{|n|=2}^{4} \mathrm{Im}\left(q_n^S\right) \rho_S^{-1} \rho_1^{n_1+n_2} \ldots \rho_{2m+1}^{n_{2m+1}+n_{2m+2}};$$

$$s = 1, 3, \ldots, 2m+1.$$

Таким образом, определено стационарное решение для системы m дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейными частями в форме полиномов четвертых степеней в нерезонансном случае.

Оценка погрешностей решений

Представим оценку погрешностей решений, полученных методом преобразований. В работе Г. И. Мельникова [22] методом дифференциальных неравенств решается задача оценки погрешности решений, полученных методом преобразований.

Рассматривается метрика для определения погрешности $\rho = \sum_{s=1}^{n} \left| y_S - \dot{y}_S \right|$, где $y_S, \dot{y}_S$ – точное и приближенное решение в окрестности $H = \{(y_1, \ldots, y_n) : |y_S| \le H,\ s = 1, \ldots, n\}$, с одинаковым начальным значением $y_S(0) = \tilde{y}_S(0) = y_0$.

В работе Г. И. Мельникова получена оценка погрешности $\rho \le V(u)$ при $h \le H$, которая определена по теореме о дифференциальных неравенствах [22]. Погрешность оценивается функцией вида $V(u) = 2\varepsilon f(u) \int_{r_0}^{u} u^m f(u)^{-2}\, du$, где u – аргумент функции оценки; ε – малая величина; $f(u) = \sum_{k=1}^{m} g_k u^k + \varepsilon u^m$, $g_k = \sum_{s=1}^{n} \sum_{|v|=k} |p_v|$, p_v – коэффициенты нелинейной правой части.

Таким образом, определена оценка погрешности $\rho \le 2\varepsilon f(u) \int_{r_0}^{u} u^m f(u)^{-2}\, du$.

Вычислительные эксперименты по решению систем дифференциальных уравнений с малой нелинейной частью в форме многочлена шестой степени методом преобразований показывают точность четвертого порядка при вычислении.

Исследование устойчивости решения нелинейных динамических систем

Для автономных систем применимы теоремы А. М. Ляпунова для решения задачи устойчивости в линейном приближении [24]. Движение асимптотически устойчиво, если вещественные части $\mathrm{Re}\lambda_S$ характеристического уравнения $\mathrm{Det}\left[I\lambda^2 + B\lambda + C\right] = 0$ отрицательны.

Рассмотрим автономную систему с вещественными коэффициентами (8), полученную в результате многочленных преобразований:

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|n|=2}^{k} \rho_1^{n_1+n_2} \ldots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Re}\left(q_n^S \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right)\right) + \varepsilon(\rho_S);\ s = 3, \ldots, m,$$

где $\varepsilon(\rho_S)$ – малая величина ошибки в методе преобразований.

Для преобразованной системы решение определено в окрестности пространства

$J = \{\rho_S : |\rho_S| \le j_S,\ s = 3, \ldots, m\}$ при $t \ge 0$.

Исследуем непрерывную неотрицательную форму $V = \sum_{S=1}^{m} \rho_S^2$, которая оценивается на промежутке $0 \le V \le H$ сверху:

$$|\rho_S| \le h_S(V);\ s = 3, \ldots, m,$$

где $h_S(V)$ – ограниченные, непрерывные, неотрицательные возрастающие функции.

Определим производную по времени от V:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\dot{\rho} = 2\sum_{S=1}^{m} \rho_S \dot{\rho}_S = 2\sum_{S=1}^{m} \rho_S^2 \mathrm{Re}\lambda_S + 2\sum_{S=1}^{m} \rho_S \varepsilon(\rho_S) +$$
$$+ 2\sum_{S=1}^{m} \sum_{|n|=2}^{k} \rho_S \rho_1^{n_1+n_2} \ldots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}} \mathrm{Re}\left(q_n^S \exp\left(i\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right)\right) \quad (9)$$

Оценим компоненты в равенстве (9), учитывая $\mathrm{Re}\lambda_S < 0$:

$$|\mathrm{Re}\lambda_S| \le \chi;\quad |\rho_S \varepsilon(\rho_S)| \le \delta;\quad |\mathrm{Re} q_S^n| \le \xi;\quad |Im q_S^n| \le \xi,$$

где $\chi > 0,\ \delta > 0,\ \xi > 0$.

В результате получим дифференциальное неравенство вида

$$\dot{V} \le -2\chi V(\rho) + 2m\delta + 2\xi \sum_{S=1}^{m} \sum_{|v|=2}^{k} \rho_S \tau_S \rho_1^{n_1+n_2} \ldots \rho_{2m-1}^{n_{2m-1}+n_{2m}}, \quad (10)$$

где

$$\tau_S = \cos\left(\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right) -$$
$$- \sin\left(\left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}(n_{2l-1} - n_{2l}) - \theta_S\right)\right)$$

В случае отсутствия резонансов $\tau_S = 1$, и неравенство (10) имеет вид

$$\dot{V} \le -2\chi V + 2m\delta + 2\xi \sum_{S=1}^{m} \sum_{|v|=2}^{k} \rho_S \rho_1^{v_1+v_2} \ldots \rho_{2m-1}^{v_{2m-1}+v_{2m}}.$$

По теореме об устойчивости движения системы [22] пусть в $\{V < H\} \subset J$ решение V системы (9) удовлетворяет

$$\dot{V} \le G(V).$$

Пусть G определена, однозначна, кусочно-непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по V, $|G(V_1)-G(V_2)|<K|V_1-V_2|$ и $G(0)\ge 0,\ t\ge 0$.

Тогда все решения (9) с начальными значениями из $\{V\le C_0\}$ при $\{0\le C_0<h\le H\}$ удовлетворяют

$$V \le C(t,C_0) \text{ при } 0\le t\le T, \qquad (11)$$

где C – решение уравнения сравнения $\dot{C}=G(C)$ с начальным условием $C(0)=C_0$.

В случае отсутствия резонансов уравнение сравнения имеет вид

$$\dot{C} = -2\chi C + 2m\delta + 2\xi C^2. \qquad (12)$$

Запишем решение дифференциального уравнения (12):

$$C(t)=\frac{1}{2\xi}\left(\chi+\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\left(2t\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}+\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}\,C_0\right)\right]\right). \qquad (13)$$

Решение определено при выполнении неравенства $\xi\ne 0$.

Подставив (13) в (11), получим:

$$V(t,C_0)\le\frac{1}{2\xi}\left(\chi+\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}\,\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\left(2t\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}+\sqrt{4m\delta\xi-\chi^2}\,C_0\right)\right]\right). \qquad (14)$$

Таким образом, построена оценка (14) окрестности системы, в которую входит любое решение $V(t,C_0)$ с начальными значениями из $\{V\le C_0\}$.

Приложение метода преобразования для исследования математической модели виброзащитной системы

Проведено исследование полученной авторами математической модели виброзащитной системы для вышки управления полетами представленным методом. Модель вышки состоит из следующих компонентов: вышка, платформа основания, кабина управления, рабочая площадка, система управления. Исследуем упрощенную модель вышки, включающую кабину управления (m_1), рабочую площадку (m_2). Она установлена на платформу (m_3) для оборудования. Для виброзащиты рассматривается кабина управления. Между каждой массой установлены нелинейные амортизаторы и демпферы. Нелинейные характеристики аппроксимированы полиномами третьей степени. Предположим, что в результате воздействия внешних периодических сил основание совершает малые вертикальные колебания вида $f_z(t)=A_1\sin(\omega_1 t)+B_1\cos(\omega_1 t)$. Размерности: $\omega\left(c^{-1}\right)$, $t(c)$, A, $B(\text{см})$. Введем обозначения координат центра масс: z_1 – кабины управления, z_2 рабочей площадки, z_3 – платформы. Запишем приведенную нелинейную модель в форме

$$z_1''(t)+b_{z1}\left(z_1'(t)-z_2'(t)\right)+c_{z1}\left(z_1'(t)-z_2'(t)\right)^2+d_{z1}\left(z_1'(t)-z_2'(t)\right)^3+$$
$$+k_{z1}\left(z_1(t)-z_2(t)\right)+l_{z1}\left(z_1(t)-z_2(t)\right)^2+p_{z1}\left(z_1(t)-z_2(t)\right)^3=\omega_1^2\left(A_1\sin(t\omega_1)+B_1\cos(t\omega_1)\right);$$

$$z_2''(t)+b_{z1}\left(z_2'(t)-z_1'(t)\right)+b_{z2}\left(z_2'(t)-z_3'(t)\right)+c_{z1}\left(z_1'(t)-z_2'(t)\right)^2+$$
$$+c_{z2}\left(z_2'(t)-z_3'(t)\right)^2+d_{z1}\left(z_2'(t)-z_1'(t)\right)^3+d_{z2}\left(z_2'(t)-z_3'(t)\right)^3+$$
$$+k_{z1}\left(z_2(t)-z_1(t)\right)+k_{z2}\left(z_2(t)-z_3(t)\right)-l_{z1}\left(z_1(t)-z_2(t)\right)^2+l_{z2}\left(z_2(t)-z_3(t)\right)^2+$$
$$+p_{z1}\left(z_2(t)-z_1(t)\right)^3+p_{z2}\left(z_2(t)-z_3(t)\right)^3=\omega_1^2\left(A_1\sin(t\omega_1)+B_1\cos(t\omega_1)\right);$$

$$z_3''(t)+b_{z2}\left(z_3'(t)-z_2'(t)\right)+b_{z3}z_3'(t)+c_{z2}\left(z_2'(t)-z_3'(t)\right)^2+$$
$$+c_{z3}z_3'(t)^2+d_{z2}\left(z_3'(t)-z_2'(t)\right)^3+d_{z3}z_3'(t)^3+k_{z2}\left(z_3(t)-z_2(t)\right)-$$
$$-l_{z2}\left(z_2(t)-z_3(t)\right)^2+k_{z3}z_3(t)+l_{z3}z_3(t)^2+p_{z2}\left(z_3(t)-z_2(t)\right)^3+$$
$$+p_{z3}z_3(t)^3=\omega_1^2\left(A_1\sin(t\omega_1)+B_1\cos(t\omega_1)\right),$$

где z_1, z_2, z_3 – относительные вертикальные координаты; k, l, p – приведенные к единице массы коэффициенты жесткости; b, c, d – приведенные к единице массы коэффициенты демпфирования.

Здесь размерности для величин уравнений: z_1, z_2, z_3 (см), b (c^{-1}), k (c^{-2}).

Посредством математического пакета программ Mathematica при следующих коэффициентах представленным методом преобразований определен режим колебаний виброзащитной системы:

$$b_{z1}=0{,}098;\ c_{z1}=0{,}009;\ d_{z1}=0{,}005;\ k_{z1}=0{,}545;\ l_{z1}=0{,}018,$$
$$p_{z1}=0{,}009;\ b_{z2}=0{,}097;\ c_{z2}=0{,}002;\ d_{z2}=0{,}005;\ k_{z2}=0{,}491;$$
$$l_{z2}=0{,}0189;\ p_{z2}=0{,}009;\ b_{z3}=0{,}096;\ c_{z3}=0{,}002;\ d_{z3}=0{,}005,$$
$$k_{z3}=0{,}503;\ l_{z3}=0{,}021;\ p_{z3}=0{,}010.$$

Обозначим малые колебания основания: $0{,}2\sin(1{,}2t)+0{,}3\cos(1{,}2t)$.

Методом многочленных преобразований найден установившийся полигармонический режим:

$$z_1=-0{,}1176\sin(1{,}2t)+0{,}0001\sin(2{,}4t)-0{,}1919\cos(1{,}2t)-0{,}0171;$$

$$z_2=-0{,}3845\sin(1{,}2t)-0{,}0004\sin(2{,}4t)-0{,}4192\cos(1{,}2t)-0{,}0002\cos(2{,}4t)-0{,}0135;$$

$$z_3=-0{,}0937\sin(1{,}2t)+0{,}0002\sin(2{,}4t)-0{,}4560\cos(1{,}2t)+0{,}0006\cos(2{,}4t)-0{,}0085.$$

Решение в абсолютных координатах:

$$q_1=0{,}0823\sin(1{,}2t)+0{,}0001\sin(2{,}4t)+0{,}1081\cos(1{,}2t)-0{,}0171;$$

$$q_2=-0{,}1845\sin(1{,}2t)-0{,}0004\sin(2{,}4t)-0{,}1192\cos(1{,}2t)-0{,}0002\cos(2{,}4t)-0{,}0135;$$

$$q_3=0{,}1063\sin(1{,}2t)+0{,}0002\sin(2{,}4t)-0{,}1560\cos(1{,}2t)+0{,}0006\cos(2{,}4t)-0{,}0085.$$

Таким образом, исследованная численно-аналитическим методом преобразований виброзащитная модель эффективно снижает влияние внешних воздействий для вышки управления полетами.

Заключение

В работе решается научная задача разработки высокопроизводительного алгоритма численно-аналитического метода преобразований для исследования режимов эксплуатации нелинейных динамических систем. Нелинейности в исследуемых моделях представлены полиномами. В работе представлен метод преобразований для исследования нелинейных математических моделей. Приведены алгоритмические формулы метода для вычисления. Представлена общая матричная форма для векторных индексов. Для экономичного вычисления правых частей полиномиальной структуры представлены формулы и предложено применить схему Пана с предварительной обработкой коэффициентов. Метод позволяет исследовать различные режимы динамики нелинейных моделей, например, определять такие экстремальные режимы, как резонанс, субгармонический, полигармонический режим. В качестве примера применения метода решена задача виброзащиты вышки управления полетами от внешних периодических воздействий. Решение, построенное методом преобразований, учитывает все нелинейные компоненты полиномов. Метод позволяет выполнять исследование динамики широкого круга нелинейных систем с необходимой точностью.

Список источников

1. *Мельников В. Г.* Преобразование динамических многочленных систем с применением аппроксимации Чебышева // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2012. № 4. С. 85–89.

2. *Бодунов Н. М.* Численно-аналитическое решение прикладных задач механики с применением полиномиальных базисных функции // Юж.-Сиб. науч. вестн. 2019. Т. 2. № 4 (28). С. 204–208.

3. *Наимов А. Н., Кобилзода М. М.* О разрешимости периодической задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Математика. 2021. № 8. С. 56–65.

4. *Булычев Ю. Г., Мельников А. В., Кондрашов А. Г., Раду П. Ю.* Численно-аналитическое описание и оценивание параметров многомерного динамического объекта при некорректных наблюдениях // Радиотехника. 2019. Т. 83. № 10. С. 11–16.

5. *Титовцев А. С., Кирпичников А. П.* Численно-аналитическое моделирование систем массового обслуживания поликомпонентных потоков // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. Междунар. науч. конф.: в 12 т. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. Т. 2. С. 80–84.

6. *Бондаренко А. И., Воронова Э. Ю.* Применение численно-аналитических методов для построения базисных функций конечных элементов // Соврем. приклад. исследования. 2020. С. 322–326.

7. *Климина Л. А., Мастерова А. А., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д.* Численно-аналитический метод поиска авторотаций механической системы с двумя вращательными степенями свободы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2021. Т. 56. № 3. С. 392–403.

8. *Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.* Асимптотический базис решений q-рекуррентных соотношений вне зоны близких собственных значений // Препр. Ин-та приклад. математики им. М. В. Келдыша РАН. 2018. 24 с.

9. *Галанин М. П., Конев С. А.* Об одном численном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Препр. Ин-та приклад. математики им. М. В. Келдыша РАН. 2017. 28 с.

10. *Троицкая А. В., Сазонов В. В.* Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром // Препр. Ин-та приклад. математики им. М. В. Келдыша РАН. 2018. № 71. 16 с.

11. *Картавченко А. Е., Тархов Д. А.* Сравнение методов построения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений на примере элементарных функций // Соврем. информац. технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 3. С. 16–23.

12. *Чье Е. У., Шеин А. Б.* Особенности реализации алгоритмов анализа переходных процессов в динамических системах операторным методом // Информатика и системы управления. 2017. № 2. С. 131–135.

13. *Брюно А. Д.* О сложных разложениях решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. № 3. С. 346–364.

14. *Петров Л. Ф.* Поиск периодических решений существенно нелинейных динамических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. № 3. С. 403–413.

15. *Горючкина И. В.* Теорема о сходимости формального решения ОДУ // Препр. Ин-та приклад. математики им. М. В. Келдыша РАН. 2011. 16 с.

16. *Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* К теории вычисления ортогонального разложения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Вычисл. методы и программирование. 2018. Т. 19. № 2. С. 178–184.

17. *Кудряшов Н. А.* Метод логистической функции для нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 23–37.

18. *Melnikov G. I., Dudarenko N. A., Malykh K. S., Ivanova L. N., Melnikov V. G.* Mathematical Models of Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems with Several Degrees of Freedom // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. IET – 2017. V. 17. N. 4. P. 369–375.

19. *Melnikov V. G., Melnikov G. I., Malykh K. S., Dudarenko N. A.* Poincare–Dulac method with Chebyshev economization in autonomous mechanical systems simulation problem // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading (St. Petersburg, 02–06 February 2015 г.). Saint-Petersburg, 2015. P. 7106757.

20. *Булычев Ю. Г., Мельников А. В.* Численно-аналитический метод исследования поведения динамической системы по результатам некорректных наблюдений без расширения пространства состояний // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 6. С. 937–950.

21. *Иванов С. Е.* Алгоритмическая реализация метода исследования нелинейных динамических систем // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2012. № 4 (80). С. 90–92.

22. *Мельников Г. И.* Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 198 с.

23. *Пан В. Я.* О способах вычисления значений многочленов // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21. № 1 (127). С. 103–134.

24. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

References

1. Mel'nikov V. G. Preobrazovanie dinamicheskikh mnogochlennykh sistem s primeneniem approksimatsii Chebysheva [Transformation of dynamic polynomial systems using Chebyshev approximation]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2012, no. 4, pp. 85-89.

2. Bodunov N. M. Chislenno-analiticheskoe reshenie prikladnykh zadach mekhaniki s primeneniem polinomial'nykh bazisnykh funktsii [Numerical-analytical solution of applied problems of mechanics by using polynomial basis functions]. *Iuzhno-Sibirskii nauchnyi vestnik*, 2019, vol. 2, no. 4 (28), pp. 204-208.

3. Naimov A. N., Kobilzoda M. M. O razreshimosti periodicheskoi zadachi dlia nelineinogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniia vtorogo poriadka [On solvability of periodic problem for second-order nonlinear ordinary differential equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika*, 2021, no. 8, pp. 56-65.

4. Bulychev Iu. G., Mel'nikov A. V., Kondrashov A. G., Radu P. Iu. Chislenno-analiticheskoe opisanie i otsenivanie parametrov mnogomernogo dinamicheskogo ob"ekta pri nekorrektnykh nabliudeniiakh [Numerical-analytical description and estimation of parameters of multidimensional dynamical object after incorrect observations]. *Radiotekhnika*, 2019, vol. 83, no. 10, pp. 11-16.

5. Titovtsev A. S., Kirpichnikov A. P. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniia polikomponentnykh potokov [Numerical-analytical modeling of queuing systems for multicomponent flows]. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiiakh: sbornik trudov*

Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii: v 12 t. Saint-Petersburg, Izd-vo Politekhn. un-ta, 2019. Vol. 2. Pp. 80-84.

6. Bondarenko A. I., Voronova E. Iu. Primenenie chislenno-analiticheskikh metodov dlia postroeniia bazisnykh funktsii konechnykh elementov [Applying numerical-analytical methods for constructing basis functions of finite elements]. *Sovremennye prikladnye issledovaniia*, 2020, pp. 322-326.

7. Klimina L. A., Masterova A. A., Samsonov V. A., Seliutskii Iu. D. Chislenno-analiticheskii metod poiska avtorotatsii mekhanicheskoi sistemy s dvumia vrashchatel'nymi stepeniami svobody [Numerical analytical method of searching for autorotations of mechanical system with two rotational degrees of freedom]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2021, vol. 56, no. 3, pp. 392-403.

8. Aptekarev A. I., Tuliakov D. N. Asimptoticheskii bazis reshenii q-rekurrentnykh sootnoshenii vne zony blizkikh sobstvennykh znachenii [Asymptotic basis for solutions of q-recurrence relations outside zone of close eigenvalues]. *Preprinty Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN*, 2018. 24 p.

9. Galanin M. P., Konev S. A. Ob odnom chislennom metode resheniia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [On numerical method for solving ordinary differential equations]. *Preprinty Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN*, 2017. 28 p.

10. Troitskaia A. V., Sazonov V. V. Periodicheskie resheniia differentsial'nogo uravneniia vtorogo poriadka s bol'shim parametrom [Periodic solutions of second-order differential equation with large parameter]. *Preprinty Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN*, 2018, no. 71, 16 p.

11. Kartavchenko A. E., Tarkhov D. A. Sravnenie metodov postroeniia priblizhennykh analiticheskikh reshenii differentsial'nykh uravnenii na primere elementarnykh funktsii [Comparison of methods for constructing approximate analytical solutions of differential equations on example of elementary functions]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 16-23.

12. Ch'e E. U., Shein A. B. Osobennosti realizatsii algoritmov analiza perekhodnykh protsessov v dinamicheskikh sistemakh operatornym metodom [Characteristics of implementing algorithms for analysis of transient processes in dynamic systems by operator method]. *Informatika i sistemy upravleniia*, 2017, no. 2, pp. 131-135.

13. Briuno A. D. O slozhnykh razlozheniiakh reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [On complex expansions of solutions of ordinary differential equations]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2018, no. 3, pp. 346-364.

14. Petrov L. F. Poisk periodicheskikh reshenii sushchestvenno nelineinykh dinamicheskikh sistem [Search for periodic solutions of essentially non-linear dynamical systems]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2018, no. 3, pp. 403-413.

15. Goriuchkina I. V. Teorema o skhodimosti formal'nogo resheniia ODU [Theorem on convergence of formal solution of ODE]. *Preprinty Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN*, 2011, 16 p.

16. Arushanian O. B., Zaletkin S. F. K teorii vychisleniia ortogonal'nogo razlozheniia resheniia zadachi Koshi dlia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poriadka [On theory of calculating orthogonal expansion of solution of Cauchy problem for second-order ordinary differential equations]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 178-184.

17. Kudriashov N. A. Metod logisticheskoi funktsii dlia nakhozhdeniia analiticheskikh reshenii nelineinykh differentsial'nykh uravnenii [Logistic function method for finding analytical solutions to nonlinear differential equations]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 23-37.

18. Melnikov G. I., Dudarenko N. A., Malykh K. S., Ivanova L. N., Melnikov V. G. Mathematical Models of Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems with Several Degrees of Freedom. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory. IET – 2017*, vol. 17, no. 4, pp. 369-375.

19. Melnikov V. G., Melnikov G. I., Malykh K. S., Dudarenko N. A. Poincare–Dulac method with Chebyshev economization in autonomous mechanical systems simulation problem. *2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading (St. Petersburg, 02–06 February 2015 g.)*. Saint-Petersburg, 2015. P. 7106757.

20. Bulychev Iu. G., Mel'nikov A. V. Chislenno-analiticheskii metod issledovaniia povedeniia dinamicheskoi sistemy po rezul'tatam nekorrektnykh nabliudenii bez rasshireniia prostranstva sostoianii [Numerical-analytical method for studying behavior of dynamical system based on results of incorrect observations without expanding state space]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 937-950.

21. Ivanov S. E. Algoritmicheskaia realizatsiia metoda issledovaniia nelineinykh dinamicheskikh sistem [Algorithmic implementation of method for studying nonlinear dynamic systems]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2012, no. 4 (80), pp. 90-92.

22. Mel'nikov G. I. *Dinamika nelineinykh mekhanicheskikh i elektromekhanicheskikh sistem* [Dynamics of nonlinear mechanical and electromechanical systems]. Leningrad Mashinostroenie Publ., 1975. 198 p.

23. Pan V. Ia. O sposobakh vychisleniia znachenii mnogochlenov [On methods for calculating values of polynomials]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1966, vol. 21, no. 1 (127), pp. 103-134.

24. Merkin D. R. *Vvedenie v teoriiu ustoichivosti dvizheniia* [Introduction to theory of motion stability]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p.

Статья поступила в редакцию 26.01.2022; одобрена после рецензирования 10.03.2022; принята к публикации 08.04.2022
The article is submitted 26.01.2022; approved after reviewing 10.03.2022; accepted for publication 08.04.2022

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Евгеньевич Иванов – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент факультета инфокоммуникационных технологий; Национальный исследовательский университет ИТМО; Serg_ie@mail.ru

Андрей Дмитриевич Телевной – аспирант факультета инфокоммуникационных технологий; Национальный исследовательский университет ИТМО; adtelev@mail.ru

Sergei E. Ivanov – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department of Information and Communication Technologies; ITMO University; Serg_ie@mail.ru

Andrey D. Televnoy – Postgraduate Student of the Department of Information and Communication Technologies; ITMO University; adtelev@mail.ru