

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК. 004.942

<https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-1-81-89>

### Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста

*Юрий Владимирович Усачёв<sup>1</sup>✉, Ирина Юрьевна Клочкова<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное командное училище,  
Рязань, Россия, i-usacheva@mail.ru✉*

---

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель движения парашютиста на раскрытом парашюте при наличии ветра. Целью работы является исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей скорость движения парашютиста при снижении на раскрытом парашюте, на предмет установления зависимости траектории движения парашютиста, наличия и устойчивости состояний равновесия от ветра. Первоначально рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая связь ускорения парашютиста и скорости по каждой из трех координат пространства в безветренную погоду. Затем учитывается влияние ветра. Доказывается теорема о количестве и устойчивости состояний равновесия. На основе реальных данных, полученных с помощью специального программного обеспечения, установленного на мобильное устройство парашютиста, методом нелинейного регрессионного анализа получены числовые значения коэффициентов системы дифференциальных уравнений. Определяются состояния равновесия прыжка, их устойчивость и предельное значение скоростей в момент приземления при наличии ветра. Для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается теорема о величине сноса парашютиста, кривизне и кручении траектории в зависимости от ветра.

**Ключевые слова:** математическая модель движения парашютиста, система обыкновенных дифференциальных уравнений, состояние равновесия, регрессионный анализ, траектория движения, скорость приземления

**Для цитирования:** Усачёв Ю. В., Клочкова И. Ю. Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 1. С. 81–89. <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-1-81-89>.

Original article

### Modeling wind influence on skydiver's trajectory

*Yuri V. Usachev<sup>1</sup>✉, Irina Yu. Klochkova<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*Ryazan Guards Higher Airborne Command School,  
Ryazan, Russia, i-usacheva@mail.ru✉*

---

**Abstract.** The article considers a mathematical model of a parachutist floating on the open parachute in the wind. The aim of the work is to study a system of differential equations describing the speed of the motion of the parachutist when descending on the open parachute, in order to establish the dependence of the trajectory of movement of the parachutist, the presence and stability of equilibrium states on the wind. Initially, a system of ordinary differential equations is considered, which determines the relationship between the acceleration of the parachutist and the speed along each of the three coordinates of space in windless weather. Then the influence of the wind is taken into account. The

theorem on the number and stability of equilibrium states is proved. Numerical values of coefficients of the system of differential equations are obtained on the basis of real data received with the help of special software installed on the parachutist's mobile device by the method of nonlinear regression analysis. The equilibrium states of the jump, their stability and the maximum value of the speeds at the moment of landing with the presence of wind are determined. For the obtained system of ordinary differential equations, a theorem is proved on the magnitude of the skydiver's drift, the curvature and torsion of the trajectory depending on the wind.

**Keywords:** mathematical model of parachutist movement, system of ordinary differential equations, equilibrium state, regression analysis, floating trajectory, landing speed

**For citation:** Usachev Yu. V., Klochkova I. Yu. Modeling wind influence on skydiver's trajectory. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2022;1:81-89. (In Russ.) <https://doi.org/10.24143/2073-5529-2022-1-81-89>.

**Введение**

В данной работе будем исследовать проблему влияния ветра на траекторию движения парашютиста и его состояния равновесия при снижении на раскрытом парашюте.

Рассмотрим движение воздушных масс, которое происходит параллельно земле. Предположим, что ветер будет менять свои параметры от слоя к слою по высоте. Для учета этих изменений пользуются понятием среднего ветра. Средний ветер – расчетный ветер постоянной скорости и направления, который оказывает такое же результирующее действие на падающее тело за время его прохождения нескольких слоев, как и реальный ветер в этих же слоях. Для расчетов применяется приближенный способ – «метод весов», заключающийся в том, что высоту десантирования  $H$  разбивают на  $n$  равных слоев одинаковой мощности  $h$ , в каждом из которых направление ветра и его скорость считают постоянными величинами  $\vec{\omega}_i$ . Величину

$$\vec{\omega} = 1/n \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$$

называют средним ветром [1, 2].

При совершении прыжка с парашютом направление движения транспортного средства часто выбирается противоположным направлению ветра  $\vec{\omega}$ . Именно эта ситуация рассматривается в данной статье.

**Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста**

Движение парашютиста опишем в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ . Ось  $Oy$  направим горизонтально, в сторону движения транспортного средства (ТС), ось  $Oz$  направим вертикально вверх, ось  $Ox$  – перпендикулярно осям  $Oy$  и  $Oz$ ; за начало координат  $O$  возьмем ортогональную проекцию начального положения парашютиста, движущегося к поверхности земли (рис. 1).

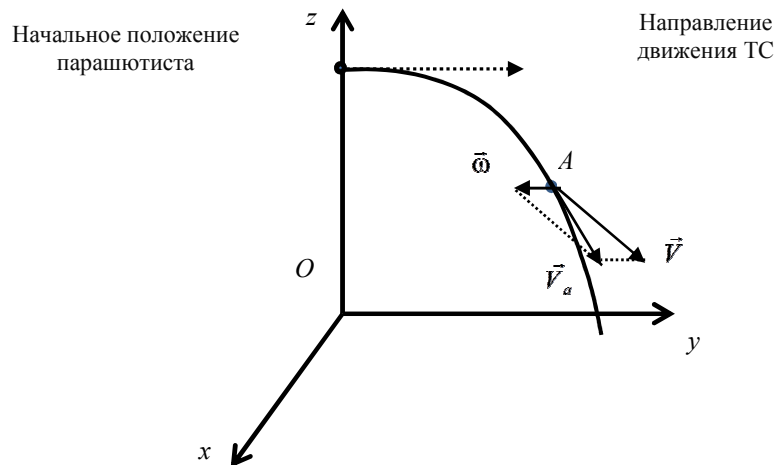


Рис. 1. Система координат:  $\vec{V}_a$  – абсолютная скорость парашютиста;  $\vec{V}$  – скорость в штилевую погоду;  $A$  – центр масс парашютиста

Fig. 1. Coordinate system:  $\vec{V}_a$  – absolute speed of the parachutist;  $\vec{V}$  – speed in calm weather;  $A$  – skydiver's center of gravity

Пусть  $x(t), y(t), z(t)$  – координаты движения парашютиста в момент времени  $t$ .

Стандартную модель прыжка парашютиста можно рассматривать как модель прыжка в безвет-

Усачёв Ю. В., Ключкова И. Ю. Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста

ренную погоду. Изменение скорости движения парашютиста в пространстве можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [3, 4]:

$$M \begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 V_x + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + V_z \left( k_3 (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + m_3 (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \right), \end{cases}$$

где  $V_x, V_y, V_z$  – скорости парашютиста по координатам  $x, y, z$  соответственно; коэффициенты  $a_1, a_2, k_3, m_3, b_n$  определяются площадью поперечного сечения тела, по отношению к воздушному потоку, формой тела, свойствами и плотностью среды;  $c_n$  зависят от ускорения свободного падения и массы тела,  $n = \overline{1,3}$ .

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot V_x + a_1 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 (V_y - \omega) + a_2 (V_y - \omega) \left( (V_y - \omega)^2 + V_z^2 \right)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + V_z \left( k_3 (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + m_3 \left( (V_y - \omega)^2 + V_z^2 \right)^{1/2} \right). \end{cases} \quad (1)$$

Для определения коэффициентов системы (1) рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = d_{11} + d_{12} \cdot x + d_{13} \cdot y + d_{14} \cdot z; \\ \dot{y} = d_{21} + d_{22} \cdot x + d_{23} \cdot y + d_{24} \cdot z; \\ \dot{z} = d_{31} + d_{32} \cdot x + d_{33} \cdot y + d_{34} \cdot z. \end{cases} \quad (2)$$

отображающую зависимость координат  $x, y, z$  от времени. С помощью специального программного обеспечения, установленного на мобильное устройство парашютиста, получены координаты траектории движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте. Из полученных данных сформируем массив  $M_\Phi$ , отображающий зависимость трех координат от времени.

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,058 - 0,078 \cdot V_x + 0,009 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = -0,057 + 0,062 \cdot V_y - 0,009 \cdot V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = 0,037 + 0,017 \cdot V_z + V_z \left( -0,052 (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + 0,049 (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Из курса воздушно-десантной подготовки известно, что средняя скорость ветра в момент десантирования не должна превышать 10 м/с, поэтому будем рассматривать следующие значения ветра:  $\omega = 0; 1; 2; 4; 6; 8; 10$  [5].

Учтем теперь влияние ветра.

Абсолютная скорость парашютиста  $\vec{V}_a$  равна  $\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\omega}$ , где  $\vec{V}$  – скорость в штилевую погоду.

Значение скорости  $\vec{V}_a$  определяется по формуле

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + (V_y - \omega)^2 + V_z^2}, \quad \omega = |\vec{\omega}|.$$

Таким образом, результирующая скорость с учетом ветра по координате  $y$  может быть представлена как  $V_{ay} = V_y - \omega$ .

Следовательно, система дифференциальных уравнений, описывающая изменение скорости движения парашютиста в пространстве с учетом ветра, совпадающего с направлением движения самолета, может быть записана в виде

Используя данные массива,  $M_\Phi$  методом регрессионного анализа определим коэффициенты  $d_{ij}$  системы (2),  $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ . Получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = 19,42 - 0,049 \cdot x - 0,0009 \cdot y - 0,025 \cdot z; \\ \dot{y} = -74,65 + 0,137 \cdot x + 0,052 \cdot y + 0,122 \cdot z; \\ \dot{z} = 8,467 + 0,045 \cdot x - 0,077 \cdot y - 0,021 \cdot z. \end{cases} \quad (3)$$

Применим метод нелинейного регрессионного анализа к системе дифференциальных уравнений (1) при  $\vec{\omega} = 0$ , используя значение скоростей  $V_x, V_y, V_z$ , определяемых системой (3).

Будем иметь

Для всех значений  $\omega$ , перечисленных выше, построим соответствующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,058 - 0,078 \cdot V_x + 0,009 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = -0,057 + 0,062 \cdot (V_y - \omega) - 0,009 \cdot (V_y - \omega) ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = 0,037 + 0,017 \cdot V_z + V_z (-0,052 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + 0,049 \cdot ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}). \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим через  $M_\omega(x_\omega, y_\omega)$  точку приземления парашютиста с координатами  $(x_\omega, y_\omega)$  при скорости ветра равной  $\bar{\omega}$ .

**Определение 1.** Расстояние между точками  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_\omega(x_\omega, y_\omega)$  будем называть величиной сноса парашютиста  $\rho_\omega$  за счет влияния ветра  $\bar{\omega}$ .

Для анализа зависимости структуры траектории от ветра обозначим через  $k_\omega(t)$  и  $\sigma_\omega(t)$  кривизну и кручение траектории, соответственно, при скорости ветра  $\bar{\omega}$  [6].

**Определение 2.** Числа  $k_\omega = \max_{t \in [0; T]} k_\omega(t)$  и  $\sigma_\omega = \max_{t \in [0; T]} |\sigma_\omega(t)|$  назовем, соответственно, коэффициентами кривизны и кручения траектории, соответствующими ветру  $\bar{\omega}$ .

**Теорема 1.** Предположим, что:

1) направление движения транспортного средства противоположно направлению ветра  $\bar{\omega}$ ,  $\omega \leq 10$ ;

2) изменение скорости движения парашютиста в пространстве описывается системой дифференциальных уравнений (5).

Тогда:

3) коэффициенты кривизны и кручения траектории парашютиста зависят от скорости ветра  $\bar{\omega}$  и определяются показательным и линейным уравнениями парной регрессии  $k_\omega = 0,0034 \cdot 1,1326^\omega$ ,  $\sigma_\omega = 0,0004 \cdot \omega + 0,0237$ ;

4) величина сноса парашютиста определяется линейным уравнением парной регрессии  $\rho_\omega$  от  $\omega$  и имеет вид  $\rho_\omega = 21,2388 \cdot \omega - 0,0004$ .

*Доказательство.*

В процессе доказательства будем рассматривать случай, когда  $\omega = 1$ .

Система дифференциальных уравнений, описывающая изменение скорости движения парашютиста, в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,058 - 0,078 \cdot V_x + 0,009 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = -0,057 + 0,062(V_y - 1) - 0,009(V_y - 1) ((V_y - 1)^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = 0,037 + 0,017 \cdot V_z + V_z (-0,052 (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + 0,049 ((V_y - 1)^2 + V_z^2)^{1/2}). \end{cases} \quad (6)$$

Для систем дифференциальных уравнений (4) и (6), в пакете прикладных программ Maple, численно найдем теоретическую траекторию движения парашютиста.

Построим траектории движения парашютиста в штилевую погоду и с учетом ветра  $\omega = 1$  (рис. 2).

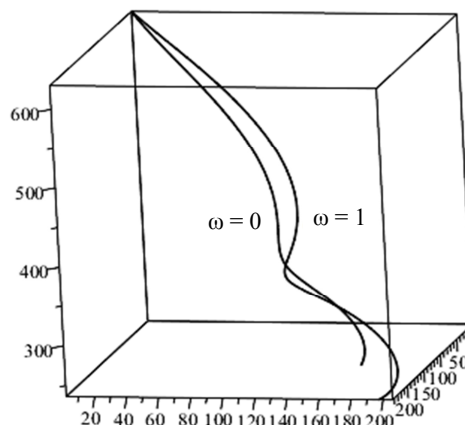


Рис. 2. Траектории движения парашютиста без учета ( $\omega = 0$ ) и с учетом влияния ветра ( $\omega = 1$ )

Fig. 2. Trajectories of the parachutist without taking into account the wind influence ( $\omega = 0$ ) and taking into account the wind influence ( $\omega = 1$ )

Численными методами, в пакете прикладных программ Maple, определим коэффициенты  $k_\omega$  и  $\sigma_\omega$  траектории парашютиста, когда  $\omega = 0$  и  $\omega = 1$ . Получим  $k_0 = 0,0035$ ,  $k_1 = 0,0038$ ,  $\sigma_0 = 0,0259$ ,  $\sigma_1 = 0,0235$ .

Для  $\omega = 0$  и  $\omega = 1$  найдем также координаты точек приземления  $M_\omega(x_\omega, y_\omega)$ . Получим, что

$$M_0(x_0, y_0) = M_0(229,684; 183,774), \quad M_1(x_1, y_1) = M_1(245,942; 197,380).$$

Вычислим величину сноса  $\rho_1$ :  $\rho_1 = 21,238$  м.

Аналогичные рассуждения проведем и для случаев, когда  $\omega = 2; 4; 6; 8; 10$ .

Полученные результаты запишем в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Зависимость коэффициентов  $k_\omega$ ,  $\sigma_\omega$  и величины сноса  $\rho_\omega$  от скорости ветра  
 Dependence of the coefficients  $k_\omega$ ,  $\sigma_\omega$  and the magnitude of the drift  $\rho_\omega$  on the wind speed

Скорость ветра $\omega$ , м/с	Координата приземления по оси $Ox$	Координата приземления по оси $Oy$	Коэффициент $k_\omega$	Коэффициент $\sigma_\omega$	Величина сноса $\rho_\omega$
0	229,684	183,774	0,0035	0,0259	0,0
1	245,992	197,380	0,0038	0,0235	21,238
2	262,301	210,987	0,0051	0,0235	42,477
4	294,918	238,199	0,0051	0,0236	84,955
6	327,534	265,411	0,0057	0,0261	127,433
8	360,151	292,623	0,0101	0,0266	169,91
10	392,768	319,836	0,0128	0,0281	212,388

На основании результатов, представленных в табл. 1, определяем коэффициенты линейной регрессии  $\sigma_\omega = b_1 \cdot \omega + a_1$ . Получаем  $b_1 = 0,0004$ ,  $a_1 = 0,0237$ , т. е.  $\rho_\omega = 0,0004 \cdot \omega + 0,0237$ . Средняя ошибка аппроксимации составляет 3,6 %.

Далее находим коэффициенты показательной регрессии  $k_\omega = a_2 \cdot b_2^\omega$ ,  $b_2 = 1,1326$ ,  $a_2 = 0,0034$ . Получаем, что  $k_\omega = 0,0034 \cdot 1,1326^\omega$  и средняя ошибка аппроксимации равна 9,9 %.

В заключении определим коэффициенты парной линейной регрессии  $\rho_\omega = b_3 \cdot \omega + a_3$ . Получаем  $b_3 = 21,2388$ ,  $a_3 = -0,0004$ , т. е.  $\rho_\omega = 21,2388 \cdot \omega - 0,0004$ . Средняя ошибка аппроксимации равна 0,0004 %.

Теорема доказана.

### Моделирование влияния ветра на существование и устойчивость состояний равновесия

Исследуем теперь систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1) на предмет существования и устойчивости состояний равновесия. Ограничимся рассмотрением случая, когда  $b_1 = c_2 = k_3 = 0$ .

Пусть вначале  $\vec{\omega} = 0$ , тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + m_3 V_z (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (7)$$

Для нахождения и определения устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (7) положим  $V_y = 0$ . Тогда из системы (7) получим уравнение для  $V_z$ :

$$m_3 V_z |V_z| + b_3 V_z + c_3 = 0. \quad (8)$$

Так как  $V_z < 0$ , то  $|V_z| = -V_z$ , соотношение (8) примет вид

$$-m_3 V_z^2 + b_3 V_z + c_3 = 0. \quad (9)$$

Дискриминант уравнения (9) определяется равенством

$$D_z^- = b_3^2 + 4m_3 c_3. \quad (10)$$

Согласно равенству (10) найдем корни уравнения (9):

$$\begin{aligned} \gamma_1^- &= \frac{b_3 - \sqrt{D_z^-}}{2m_3}; \\ \gamma_2^- &= \frac{b_3 + \sqrt{D_z^-}}{2m_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если для уравнения (9) выполняются неравенства

$$D_z^- = b_3^2 + 4m_3 c_3 > 0; \quad -c_3/m_3 > 0; \quad -b_3/m_3 > 0, \quad (12)$$

то корни (11) уравнения (9) будут отрицательными.

Для определения  $V_x$  получим уравнение

$$a_1 V_x (V_x^2 + (\gamma_{1,2}^-)^2)^{1/2} = -c_1 \quad (13)$$

или

$$a_1^2 V_x^4 + a_1^2 (\gamma_{1,2}^-)^2 V_x^2 - c_1^2 = 0.$$

Обозначим

$$D_{1,2} = a_1^4 (\gamma_{1,2}^-)^4 + 4a_1^2 c_1^2; \\ \alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{1,2}} - a_1^2 (\gamma_{1,2}^-)^2}{2a_1^2}}. \quad (14)$$

Тогда уравнение (13), с учетом равенства (14), имеет решения  $V_{x_{1,2}}^\pm = \pm \alpha_{1,2}$ . Более того, если  $c_1 a_1 < 0$ , то  $V_{x_{1,2}} = \alpha_{1,2} > 0$ , если же  $c_1 a_1 > 0$ , то  $V_{x_{1,2}} = -\alpha_{1,2} < 0$ .

Для определения устойчивости состояний равновесия  $A_1^\pm(\pm\alpha_1, 0, \gamma_1^-)$ ,  $A_2^\pm(\pm\alpha_2, 0, \gamma_2^-)$  введем следующие обозначения:

$$c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = P(V_x, V_y, V_z); \\ b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = Q(V_x, V_y, V_z); \\ c_3 + b_3 V_z + m_3 V_z (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = M(V_x, V_y, V_z).$$

Найдем частные производные функций

$$P(V_x, V_y, V_z), Q(V_x, V_y, V_z), M(V_x, V_y, V_z);$$

$$P'_{V_x} = \frac{a_1(2V_x^2 + V_z^2)}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; \\ P'_{V_y} = 0; P'_{V_z} = \frac{a_1 V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; \\ Q'_{V_x} = 0; Q'_{V_y} = b_2 + \frac{a_2(2V_y^2 + V_z^2)}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; \\ Q'_{V_z} = b_3 + \frac{a_2 V_y V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; \\ M'_{V_x} = 0; M'_{V_y} = \frac{m_3 V_y V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; \\ M'_{V_z} = b_3 + \frac{m_3(2V_z^2 + V_y^2)}{\sqrt{V_z^2 + V_y^2}}.$$

Собственные значения матрицы линейной части системы уравнений (7) в состояниях равновесия  $A_1^\pm$ ,  $A_2^\pm$  определяются равенствами

$$\lambda_1^{A_1^\pm} = \frac{a_1(2\alpha_{1,2}^2 + (\gamma_{1,2}^-)^2)}{\sqrt{\alpha_{1,2}^2 + (\gamma_{1,2}^-)^2}}; \lambda_2^{A_1^\pm} = b_2 + a_2 |\gamma_{1,2}^-|; \\ \lambda_3^{A_1^\pm} = b_3 + 2m_3 |\gamma_{1,2}^-|. \quad (15)$$

Тогда при выполнении условий

$$a_1 < 0; b_2 + a_2 |\gamma_{1,2}^-| < 0; b_3 + 2m_3 |\gamma_{1,2}^-| < 0 \quad (16)$$

собственные значения матрицы линейной части (15) окажутся отрицательными. Следовательно, состояния равновесия  $A_1^\pm$ ,  $A_2^\pm$  будут являться устойчивыми.

Таким образом, установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 2.** Предположим, что для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) выполняются неравенства (12).

Тогда:

- 1) если  $c_1 a_1 < 0$ , то система дифференциальных уравнений (7) имеет состояния равновесия  $A_1^+(\alpha_1; 0; \gamma_1^-)$ ,  $A_2^+(\alpha_2; 0; \gamma_2^-)$ ;
- 2) если  $c_1 a_1 > 0$ , то система дифференциальных уравнений (7) имеет состояния равновесия  $A_1^-(-\alpha_1; 0; \gamma_1^-)$ ,  $A_2^-(-\alpha_2; 0; \gamma_2^-)$ ;
- 3) если, дополнительно, выполняются неравенства (16), то состояния равновесия  $A_1^\pm$ ,  $A_2^\pm$  являются устойчивыми.

**Следствие 2.1.** Если выполняется хотя бы одно из неравенств  $a_1 > 0; b_2 + a_2 |\gamma_{1,2}^\pm| > 0; b_3 + 2m_3 |\gamma_{1,2}^\pm| > 0$ , то состояния равновесия  $A_1^\pm$ ,  $A_2^\pm$  являются неустойчивыми.

**Следствие 2.2.** Пусть  $\vec{\omega} \neq 0$ , тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (1), в данном случае, примет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = b_2 (V_y - \omega) + a_2 (V_y - \omega) ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + m_3 V_z ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases}$$

Осуществим замену переменной, положив  $\tilde{V}_y = V_y - \omega$ . Получим систему дифференциальных уравнений, аналогичную системе (7):

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{\tilde{V}}_y = b_2 \tilde{V}_y + a_2 \tilde{V}_y (\tilde{V}_y^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z + m_3 V_z (\tilde{V}_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (17)$$

Система дифференциальных уравнений (17), при выполнении условий теоремы 2, имеет два состояния

равновесия:  $A_1^\pm(\pm\alpha_1; \omega; \gamma_1^-)$ ,  $A_2^\pm(\pm\alpha_2; \omega; \gamma_2^-)$ , которые, в зависимости от выполнения условий (16), будут либо устойчивыми, либо неустойчивыми.

Обратимся теперь к записанным координатам траектории движения парашютиста  $M_\phi$ . Методом регрессионного анализа, используя данные массива  $M_\phi$ , пересчитаем коэффициенты системы дифференциальных уравнений (7) для этого случая. Получим

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -0,013 - 0,001 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = -0,002 \cdot V_y - 0,002 \cdot V_y (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = -0,166 - 0,147 \cdot V_z + 0,019 \cdot V_z (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (18)$$

**Теорема 3.** Система обыкновенных дифференциальных уравнений (18) имеет два состояния равновесия, одно из которых является устойчивым, другое – неустойчивым.

*Доказательство.* Исследуем систему (18) на наличие и устойчивость состояний равновесия, используя теорему 2.

Проверим выполнение условий (12). Имеем

$$\begin{aligned} D_z^- &= 0,022 + 0,013 > 0; \\ -c_3/m_3 &= -0,019/-0,166 > 0; \end{aligned}$$

$$-b_3/m_3 = -0,147/-0,166 > 0.$$

И поскольку  $c_1 a_1 = -0,013 (-0,001) > 0$ , то, в силу теоремы 2, система дифференциальных уравнений (17) имеет два состояния равновесия:  $A_1^-(-3,214; 0; -1,386)$ ,  $A_2^-(-1,772; 0; -6,095)$ .

Для выяснения вопроса устойчивости полученных состояний равновесия проверим выполнение условий (16).

$$\begin{aligned} A_1^- : a_1 &= -0,013 < 0; \\ b_2 + a_2 |\gamma_{1,2}^-| &= -0,002 - 0,002 \cdot 1,386 < 0; \\ b_3 + 2m_3 |\gamma_{1,2}^-| &= -0,166 + 2 \cdot 0,019 \cdot 1,386 < 0; \\ A_2^- : a_1 &= -0,013 < 0; \\ b_2 + a_2 |\gamma_{1,2}^-| &= -0,002 - 0,002 \cdot 6,095 < 0; \\ b_3 + 2m_3 |\gamma_{1,2}^-| &= -0,166 + 2 \cdot 0,019 \cdot 6,095 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме 2, можно сделать вывод о том, что состояние  $A_1^-(-3,214; 0; -1,386)$  является устойчивым, а состояние  $A_2^-(-1,772; 0; -6,095)$  является неустойчивым.

Графически состояние  $A_1^-$  представлено на рис. 3.

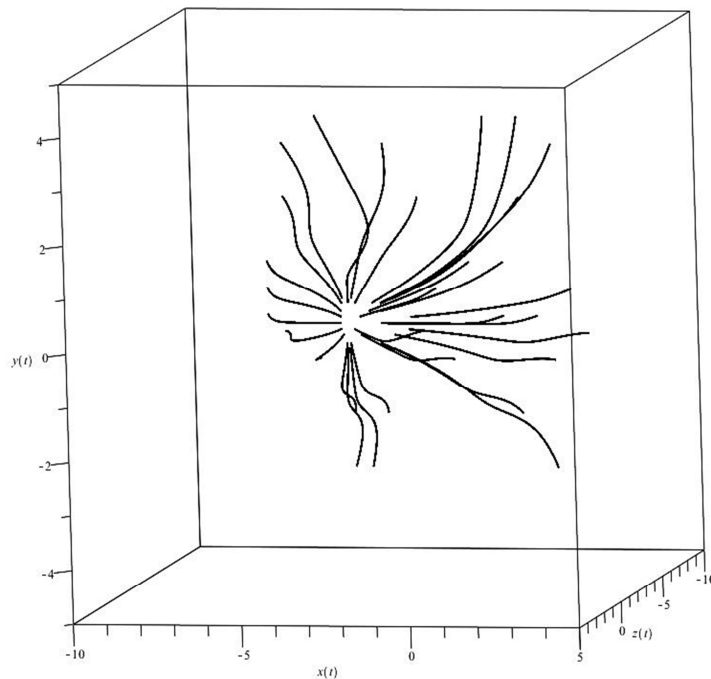


Рис. 3. Устойчивое состояние равновесия  $A_1^-$

Fig. 3. Steady equilibrium  $A_1^-$

Теорема доказана.

**Следствие 3.1.** Из приведенных рассуждений следует, что скорость парашютиста по координате

$x$  стремится к  $-3,214$  м/с; по координате  $y$  к  $0$  м/с; по координате  $z$  к  $-1,386$  м/с. Результирующая скорость по всем трем координатам стремится к  $3,5$  м/с.

Следствие 3.2. При наличии ветра  $\vec{\omega}$  система дифференциальных уравнений (18), описывающая скорость движения парашютиста, будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -0,013 - 0,001 \cdot V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_y = -0,002(V_y - \omega) - 0,002(V_y - \omega)((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}; \\ \dot{V}_z = -0,166 - 0,147 \cdot V_z + 0,019 \cdot V_z ((V_y - \omega)^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (19)$$

Согласно теоремам 2 и 3 система уравнений (19) будет иметь два состояния равновесия: устойчивое  $A_1^-( -3,214; \omega; -1,386)$  и неустойчивое  $A_2^-( -1,772; \omega; -6,095)$ .

Следствие 3.3. В случае ветра  $\vec{\omega}$  скорость парашютиста по координате  $x$  стремится к  $-3,214$  м/с; по координате  $y$  — к  $\omega$ , м/с; по координате  $z$  —

к  $-1,386$  м/с. Результирующая скорость по всем трем координатам стремится к  $\sqrt{12,251 + \omega^2}$ .

Зависимость скорости парашютиста в момент приземления  $V_{пр}$  от скорости ветра  $\omega$  представлена в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

**Зависимость скорости парашютиста в момент приземления от скорости ветра**

**Dependence of the speed of the parachutist on the wind speed at landing**

Скорость ветра $\omega$ , м/с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Скорость в момент приземления $V_{пр}$ , м/с	3,500	3,640	4,031	4,610	5,315	6,103	6,946	7,826	8,732	9,657	10,595

В целях безопасности совершать прыжки с парашютом разрешается при скорости ветра у земли не более 6 м/с днем и 4 м/с ночью [5]. Как следует из табл. 3, скорость парашютиста в момент приземления  $V_{пр}$  днем не будет превышать 6,946 м/с, ночью — 5,315 м/с.

**Заключение**

Представленная в работе система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и ее част-

ные случаи (5), (7) и (18) могут быть использованы для моделирования влияния ветра на движение парашютиста при снижении на раскрытом парашюте. В частности, может быть вычислена величина сноса парашютиста за счет влияния ветра, а также определена скорость в момент приземления. Кривизна и кручение траектории, кроме структуры, позволяют определить полную нагрузку, которую испытывает парашютист при совершении прыжка.

**Список источников**

1. Лобанов Н. А. Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1965. 365 с.
2. Лялин В. В., Морозов В. И., Пономарев А. Т. Парашютные системы. М.: Физматлит, 2009. 506 с.
3. Ключкова И. Ю. Математическое моделирование движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 2021. № 2. С. 26–30.

4. Мамонов С. С., Ключкова И. Ю. Моделирование движения парашютиста при раскрытом парашюте // Вестн. Рязан. радиотехн. ун-та. 2018. Т. 66. С. 64–70.
5. Герасименко И. А. Воздушно-десантная подготовка. М.: Воен. изд-во, 1986. 407 с.
6. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. М.: Гос. издан. техн.-теорет. лит., 1949. 511 с.

**References**

1. Lobanov N. A. *Osnovy rascheta i konstruirovaniya parashjutov* [Fundamentals of calculation and design of parachutes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1965. 365 p.
2. Ljalın V. V., Morozov V. I., Ponomarev A. T. *Parashjutnyye sistemy* [Parachute systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 506 p.

3. Klochkova I. Ju. *Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya parashjutista na jetape snizheniya na raskrytom parashjute* [Mathematical modeling of descending parachutist with open parachute]. *Differencial'nye uravnenija i matematicheskoe modelirovanie*, 2021, no. 2, pp. 26-30.

Усачёв Ю. В., Ключкова И. Ю. Моделирование влияния ветра на траекторию движения парашютиста



4. Mamonov S. S., Klochkova I. Ju. Modelirovanie dvizhenija parashjutista pri raskrytom parashjute [Modeling movement of parachutist with open parachute]. *Vestnik Rjazanskogo radiotekhnicheskogo universiteta*, 2018, vol. 66, pp. 64-70.

5. Gerasimenko I. A. *Vozdushno-desantnaja podgotovka* [Airborne training]. Moscow, Voennoe izdatel'stvo, 1986. 407 p.

6. Vygodskij M. Ja. *Differencial'naja geometrija* [Differential geometry]. Moscow, Gosudarstvennoe izdanie tehniko-teoreticheskoy literatury, 1949. 511 p.

Статья поступила в редакцию 24.10.2021; одобрена после рецензирования 23.12.2021; принята к публикации 18.01.2022  
The article is submitted 24.10.2021; approved after reviewing 23.12.2021; accepted for publication 18.01.2022

### Информация об авторах / Information about the authors

**Юрий Владимирович Усачёв** – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин; Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное командное училище; Рязань, площадь генерала армии В. Ф. Маргелова, д. 1; usachev\_y\_v@mail.ru

**Yuri V. Usachev** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor; Head of the Department of Mathematics and Natural Sciences; Ryazan Guards Higher Airborne Command School; Ryazan, General of the Army V. F. Margelov Square, 1; usachev\_y\_v@mail.ru

**Ирина Юрьевна Клочкова** – преподаватель математических и естественно-научных дисциплин; Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное командное училище; Рязань, площадь генерала армии В. Ф. Маргелова, д. 1; i-usacheva@mail.ru

**Irina Yu. Klochkova** – Lecturer of the Department of Mathematics and Natural Sciences; Ryazan Guards Higher Airborne Command School; Ryazan, General of the Army V. F. Margelov Square, 1; i-usacheva@mail.ru

