

# УПРАВЛЕНИЕ В СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

DOI: 10.24143/2072-9502-2020-4-101-111  
УДК 330.42, 336.226.111, 336.225.51, 519.2, 004.942

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА УРОВНЯ БЕДНОСТИ ПРИ РАЗНЫХ ФОРМАХ ПОДОХОДНОГО НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

*А. В. Михеев*

*Казанский национальный исследовательский технологический университет,  
Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация*

Построена вероятностная модель для расчета количества бедных и совокупного подоходного налога, взимаемого со всех налогоплательщиков, при разных системах подоходного налогообложения. Рассматриваются пропорциональная система подоходного налогообложения, принятая в Российской Федерации, а также одноступенчатые системы как с фиксированной, так и с переменной налоговой ставкой, в которых физические лица с низкими доходами освобождаются от уплаты подоходного налога. Для всех этих систем налогообложения найдены зависимости математического ожидания количества бедных и совокупного подоходного налога от величины налоговой ставки, минимального облагаемого налогом дохода, а также от законов распределения вероятностей совокупного дохода и прожиточного минимума физического лица. Проведено численное моделирование найденных зависимостей и определены условия, при которых отмена подоходного налога для физических лиц с низкими доходами уменьшает количество бедных. Сформулированы математические критерии, с помощью которых можно оценить целесообразность перехода от пропорциональной системы к одноступенчатым системам подоходного налогообложения.

**Ключевые слова:** подоходный налог, налоговая ставка, количество бедных, необлагаемый налогом минимум, прожиточный минимум, плотность распределения вероятности, математическое ожидание.

**Для цитирования:** *Михеев А. В.* Вероятностная модель расчета уровня бедности при разных формах подоходного налогообложения // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 4. С. 101–111. DOI: 10.24143/2072-9502-2020-4-101-111.

### **Введение**

Подоходным налогом называется прямой налог, который начисляется на доходы физических лиц, полученные ими за определенный промежуток времени [1]. Различают три вида подоходного налога [2, 3]:

1. Равный налог, при котором все физические лица, независимо от величины их дохода, уплачивают за данный промежуток времени одно и то же количество денежных единиц (ден. ед.).
2. Пропорциональный налог: все физические лица, независимо от величины дохода, уплачивают за данный промежуток времени одинаковую долю своих доходов.
3. Прогрессивный налог: доля доходов, уплачиваемых физическими лицами, т. е. налоговая ставка, зависит от величины дохода, как правило, растет с ростом дохода.

Кроме того, существуют системы подоходного налогообложения, представляющие собой комбинации этих трех видов подоходного налога. Например, в Германии используется комбинация пропорциональной и прогрессивной систем налогообложения: существуют области доходов физических лиц, в пределах которых налоговая ставка не меняется, а есть такие области доходов, в пределах которых налоговая ставка растет линейно с ростом доходов [2].

В Российской Федерации принята пропорциональная или, по-другому, «плоская» система подоходного налогообложения с одинаковой для всех физических лиц налоговой ставкой, равной 13 % [4]. Несмотря на свою простоту, эта система налогообложения не является социально сбалансированной: физические лица с низкими доходами отдают в виде налога ту же часть своих доходов, что и богатые налогоплательщики. При этом очевидно, что физические лица с высокими доходами могли бы отдавать значительно большую часть своих доходов без серьезного снижения уровня жизни. Осознание этого факта налогоплательщиками, чей доход близок к прожиточному минимуму, создает в обществе социальную напряженность, которая тем заметнее, чем больше таких налогоплательщиков. В РФ количество людей с доходами меньше прожиточного минимума достаточно велико. По данным Росстата, в 2018 г. численность населения с денежными доходами ниже прожиточного минимума составляла 18,4 млн чел. [5]. По этой причине в последнее время российскими экономистами все чаще обсуждается возможность отказа от «плоской» системы налогообложения в пользу одноступенчатой системы, при которой физические лица с доходами, меньшими некоторой величины, называемой необлагаемым минимумом, освобождаются от уплаты подоходного налога.

Однако при переходе к любой новой системе подоходного налогообложения неизбежно возникают следующие вопросы:

1. Снимет ли такой переход социальную напряженность? Другими словами, уменьшится ли при таком переходе количество бедных?

2. Будет ли такой переход экономически оправданным, т. е. может ли вырасти при таком переходе величина совокупного подоходного налога, собираемого со всех налогоплательщиков?

3. Можно ли так выбрать величину необлагаемого налогом минимума и налоговую ставку для физических лиц с доходами, превышающими этот минимум, чтобы ответы на первые два вопроса были утвердительными?

*Целью настоящей работы* является разработка математической модели, позволяющей рассчитать изменение количества бедных и совокупного подоходного налога при переходе от «плоской» к одноступенчатым (пропорциональной и прогрессивной) системам подоходного налогообложения, т. е. такой модели, в рамках которой возможно дать математически обоснованные ответы на поставленные выше вопросы.

### Основные положения вероятностной модели

Ключевые экономические величины, необходимые для расчета количества бедных и совокупного подоходного налога, являются случайными [6]. Для их корректного и полного описания требуется математический аппарат теории вероятностей. По этой причине описываемая далее математическая модель является вероятностной. Ниже приведен список всех экономических величин, участвующих в построении вероятностной модели, с описанием их свойств.

1.  $N$  – количество физических лиц, являющихся налогоплательщиками.

2.  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) – совокупный доход  $j$ -го налогоплательщика за некоторый промежуток времени, например за месяц. Множество налогоплательщиков будем считать неупорядоченным, а получение доходов различными физическими лицами – независимыми событиями. При этих предположениях случайные величины  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) можно считать попарно независимыми и охарактеризовать единой плотностью распределения вероятности  $\varphi_p(x)$ , не зависящей от номера  $j$ . Наряду с  $\varphi_p(x)$  можно использовать интегральную функцию распределения вероятности  $F_p(x) = \int_0^x \varphi_p(t) dt$ .

3.  $p_j^{(\min)}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) – индивидуальный прожиточный минимум  $j$ -го налогоплательщика, определенный за тот же промежуток времени, что и  $p_j$ . Он представляет собой минимальные расходы, которые вынужден нести  $j$ -й налогоплательщик на рассматриваемом промежутке времени для удовлетворения своих жизненно важных потребностей. Прожиточный минимум зависит от места проживания физического лица, состояния его здоровья, уровня его доходов, имеющихся у него непогашенных банковских займов или кредитов, от стоимости имущества, находящегося в его собственности, а также от других факторов. Непрерывные случай-

ные величины  $p_1^{(\min)}, p_2^{(\min)}, \dots, p_N^{(\min)}$ , как и  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), можно считать попарно независимыми и одинаково распределенными. Общую для них плотность распределения вероятности обозначим через  $\varphi_{\min}(x)$ , а интегральную функцию распределения – через  $F_{\min}(x) = \int_0^x \varphi_{\min}(t) dt$ .

4.  $p_{ff}$  – необлагаемый налогом минимум. Физические лица, доходы которых меньше, чем  $p_{ff}$ , освобождаются от уплаты подоходного налога.

5.  $\varepsilon \in [0; 1]$  – налоговая ставка, т. е. доля совокупного дохода или доля превышения совокупного дохода над необлагаемым минимумом, уплачиваемая физическим лицом в качестве подоходного налога.

В дальнейшем будем считать, что необлагаемый минимум и налоговая ставка не являются случайными величинами: их значения фиксированы. Кроме того, пренебрежем возможным наличием у физических лиц на момент получения дохода и уплаты с него налога таких сбережений, размер которых мог бы повлиять на их платежеспособность и уровень жизни. Еще одно важное предположение, которому мы будем следовать при построении вероятностной модели: никто из налогоплательщиков не уклоняется от уплаты подоходного налога.

### Пропорциональная («плоская») система подоходного налогообложения

При пропорциональной («плоской») системе налогообложения подоходный налог уплачивают все физические лица по фиксированной ставке, независимо от уровня их дохода. Поэтому количество бедных в этом случае равно количеству налогоплательщиков, доход которых после уплаты подоходного налога оказался ниже прожиточного минимума:

$$N_p^{(0)}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^N H((1-\varepsilon)p_j < p_j^{(\min)}), \quad (1)$$

где  $H(A)$  – индикатор появления случайного события  $A$ :  $H(A) = 1$ , если событие  $A$  произошло, и  $H(A) = 0$ , если событие  $A$  не произошло. Совокупный подоходный налог, собранный со всех налогоплательщиков, при «плоской» системе налогообложения равен

$$S^{(0)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^N p_j. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) видно, что количество бедных и совокупный подоходный налог представляют собой сумму большого количества однотипных слагаемых. Это значит, что истинное значение каждой из этих величин практически не отличается от ее математического ожидания. Поэтому в дальнейших рассуждениях вместо случайных величин  $N_p^{(0)}(\varepsilon)$  и  $S^{(0)}(\varepsilon)$  будут использоваться их математические ожидания:  $\tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon) \equiv E(N_p^{(0)}(\varepsilon))$ ;  $\tilde{S}^{(0)}(\varepsilon) \equiv E(S^{(0)}(\varepsilon))$ .

Применим линейный оператор  $E(\dots)$ , вычисляющий математическое ожидание, к левой и правой частям равенств (1) и (2). В результате получаются следующие зависимости от налоговой ставки среднего количества бедных и среднего совокупного подоходного налога при пропорциональной системе налогообложения:

$$\tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon) = \tilde{N} \int_0^{+\infty} \varphi_p(x) (1 - F_{\min}((1-\varepsilon)x)) dx; \quad (3)$$

$$\tilde{S}^{(0)}(\varepsilon) = \varepsilon \tilde{p} \tilde{N}, \quad (4)$$

где  $\tilde{N}$  – математическое ожидание количества налогоплательщиков;  $\tilde{p} = \int_0^{+\infty} x \varphi_p(x) dx$  – средний доход налогоплательщика.

Вполне ожидаемо обе зависимости оказались монотонно возрастающими функциями налоговой ставки  $\varepsilon$ . При этом, как следует из (3) и (4), имеют место два предельных равенства:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon) = \tilde{N}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \tilde{S}^{(0)}(\varepsilon) = \tilde{p}\tilde{N}.$$

Однако характер зависимости (4) существенно отличается от (3): с увеличением  $\varepsilon$  от 0 до 1 средний подоходный налог растет линейно, а математическое ожидание количества бедных – нелинейно, причем тип нелинейности определяется тем, как распределены доходы и прожиточный минимум налогоплательщиков.

Важнейшим достоинством пропорциональной системы налогообложения является ее простота, а главным недостатком – отсутствие социальной справедливости. Социальная несправедливость состоит в том, что люди с низкими доходами отдают в виде налога такую же долю своих доходов, как и люди с высокими доходами [3]. При этом очевидно, что люди с высокими доходами могли бы отдавать больше без ущерба для своего благосостояния. Гораздо более справедливой является такая система налогообложения, при которой физические лица с доходами, не превышающими определенного уровня  $p_{ff}$ , освобождаются от уплаты подоходного налога, а все остальные уплачивают его так же, как и при пропорциональной системе с фиксированной налоговой ставкой, применяемой к совокупному доходу. Назовем эту систему налогообложения *одноступенчатой пропорциональной*.

#### Одноступенчатая пропорциональная система подоходного налогообложения

При одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения количество бедных складывается из двух частей. Во-первых, бедными являются те физические лица, которые не платят подоходный налог ( $p_j \leq p_{ff}$ ), но имеют доход ниже прожиточного минимума. Во-вторых, к бедным относятся физические лица, доход которых больше, чем  $p_{ff}$ , и превышает прожиточный минимум, но становится меньше прожиточного минимума после уплаты подоходного налога. Таким образом, количество бедных при одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения равно

$$N_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) = \sum_{j=1}^N \left( H(p_j \leq p_{ff}) H(p_j < p_j^{(\min)}) + H(p_j > p_{ff}) H((1-\varepsilon)p_j < p_j^{(\min)}) \right). \quad (5)$$

В свою очередь, собранный со всех налогоплательщиков подоходный налог при такой системе налогообложения составляет

$$S^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) = \varepsilon \sum_{j=1}^N p_j H(p_j > p_{ff}). \quad (6)$$

При больших  $N$  истинные значения случайных величин  $N_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff})$  и  $S^{(1)}(\varepsilon, p_{ff})$ , как и значения соответствующих величин в случае «плоской» системы налогообложения, мало отличаются от их математических ожиданий:

$$N_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \approx \tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \equiv E(N_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff})); \quad S^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \approx \tilde{S}^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \equiv E(S^{(1)}(\varepsilon, p_{ff})).$$

Уравнения (5), (6) приводят к следующим аналитическим выражениям для среднего количества бедных и среднего совокупного подоходного налога при одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения:

$$\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) = \tilde{N} \int_0^{p_{ff}} \varphi_p(x) (1 - F_{\min}(x)) dx + \tilde{N} \int_{p_{ff}}^{+\infty} \varphi_p(x) (1 - F_{\min}((1-\varepsilon)x)) dx; \quad (7)$$

$$\tilde{S}^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) = \varepsilon \tilde{N} \int_{p_{ff}}^{+\infty} x \varphi_p(x) dx. \quad (8)$$

Сравнение формул (7), (8) с (3), (4) показывает, что при любой налоговой ставке и любом значении необлагаемого налогом минимума справедливы неравенства

$$\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \leq \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon); \tilde{S}^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) \leq \tilde{S}^{(0)}(\varepsilon).$$

Они означают, что переход от «плоской» к одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения с сохранением величины налоговой ставки действительно уменьшает количество бедных, но при этом также уменьшается величина совокупного подоходного налога. Таким образом, указанный переход будет экономически оправданным, только если он сопровождается увеличением налоговой ставки. Однако увеличение налоговой ставки, как следует из (7), приводит к росту количества бедных. Отсюда следует важный вывод: переход от пропорциональной системы налогообложения с налоговой ставкой  $\varepsilon_0$  к одноступенчатой пропорциональной системе с налоговой ставкой  $\varepsilon_1$  является экономически оправданным и социально обоснованным (уменьшает количество бедных), если  $\varepsilon_1$  и необлагаемый налогом минимум  $p_{ff}$  являются решениями системы неравенств

$$\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon_1, p_{ff}) < \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon_0); \tilde{S}^{(1)}(\varepsilon_1, p_{ff}) \geq \tilde{S}^{(0)}(\varepsilon_0). \quad (9)$$

Одноступенчатая пропорциональная система налогообложения, даже в том случае, когда  $\varepsilon_1$  и  $p_{ff}$  являются решениями системы неравенств (9), не является вполне социально справедливой. Дело в том, что физические лица, доходы которых незначительно превышают необлагаемый минимум, уплачивают подоходный налог на тех же условиях, что и физические лица с высокими доходами, в то время как физические лица с доходами немного меньшими, чем  $p_{ff}$ , не платят налог вовсе. В результате возникает социальная напряженность, т. к. лица с доходами, немного большими, чем  $p_{ff}$ , чувствуют себя обманутыми: их доходы после уплаты подоходного налога могут оказаться меньше доходов некоторых физических лиц, освобожденных от уплаты налога. Этого недостатка лишена система налогообложения, при которой физические лица с доходами, не превышающими  $p_{ff}$ , освобождаются от уплаты подоходного налога, а для всех остальных устанавливается единая фиксированная ставка, применяемая к превышению их дохода над безналоговым минимумом  $p_{ff}$ . Назовем эту систему налогообложения *одноступенчатой прогрессивной*.

#### Одноступенчатая прогрессивная система подоходного налогообложения

Количество бедных при одноступенчатой прогрессивной системе налогообложения рассчитывается практически так же, как и при одноступенчатой пропорциональной системе. Отличие состоит лишь в том, что доход  $j$ -го физического лица после уплаты им подоходного налога уменьшается не на величину  $\varepsilon p_j$ , как это предполагалось при выводе (1) и (5), а на величину  $\varepsilon(p_j - p_{ff})$ . Поэтому вместо (5) получается следующая формула:

$$N_p^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) = \sum_{j=1}^N \left( H(p_j \leq p_{ff}) H(p_j < p_j^{(\min)}) + H(p_j > p_{ff}) H(p_j - \varepsilon(p_j - p_{ff}) < p_j^{(\min)}) \right). \quad (10)$$

Аналогично вклад  $j$ -го физического лица в совокупный подоходный налог при одноступенчатой прогрессивной системе налогообложения равен  $\varepsilon(p_j - p_{ff})$ , а не  $\varepsilon p_j$ , как это было в «плоской» и одноступенчатой пропорциональной системах:

$$S^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) = \varepsilon \sum_{j=1}^N (p_j - p_{ff}) H(p_j > p_{ff}). \quad (11)$$

В свою очередь, математические ожидания определяемых формулами (10) и (11) случайных величин  $N_p^{(2)}(\varepsilon, p_{ff})$  и  $S^{(2)}(\varepsilon, p_{ff})$  имеют вид

$$\tilde{N}_p^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) = \tilde{N} \int_0^{p_{ff}} \varphi_p(x)(1 - F_{\min}(x))dx + \tilde{N} \int_{p_{ff}}^{+\infty} \varphi_p(x)(1 - F_{\min}((1 - \varepsilon)x + \varepsilon p_{ff}))dx; \quad (12)$$

$$\tilde{S}^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) = \varepsilon \tilde{N} \int_0^{+\infty} x \varphi_p(x + p_{ff})dx. \quad (13)$$

Как и в случае одноступенчатой пропорциональной системы налогообложения, сравнение (12), (13) с (3), (4) показывает, что переход от пропорциональной системы налогообложения с налоговой ставкой  $\varepsilon_0$  к одноступенчатой прогрессивной системе с налоговой ставкой  $\varepsilon_2$  является экономически оправданным и социально обоснованным (уменьшает количество бедных), только если  $\varepsilon_2$  и необлагаемый налогом минимум  $p_{ff}$  являются решениями системы неравенств

$$\tilde{N}_p^{(2)}(\varepsilon_2, p_{ff}) < \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon_0); \quad \tilde{S}^{(2)}(\varepsilon_2, p_{ff}) \geq \tilde{S}^{(0)}(\varepsilon_0). \quad (14)$$

#### Обобщение одноступенчатой прогрессивной системы подоходного налогообложения

В некоторых странах, использующих прогрессивную систему подоходного налогообложения, налоговая ставка  $\varepsilon$  не является постоянной. Она меняется в зависимости от величины превышения дохода налогоплательщика над необлагаемым минимумом, т. е. является некоторой известной функцией разности  $p_j - p_{ff}$ :  $\varepsilon = f_\varepsilon(p_j - p_{ff}, q)$ , где  $q$  – вектор параметров функции  $f_\varepsilon$ . Например, в США функция  $f_\varepsilon(p_j - p_{ff}, q)$  является кусочно-постоянной, принимая различные постоянные значения в разных областях значений своего аргумента [2]. В Германии эта функция является кусочно-линейной: налоговая ставка линейно увеличивается с ростом  $p_j - p_{ff}$ , причем с разной скоростью в разных областях значений  $p_j - p_{ff}$  [2]. В этом случае принципы подсчета количества бедных и суммарного подоходного налога, собираемого со всех налогоплательщиков, остаются теми же, что и при выводе формул (10), (11). Необходимо лишь учесть переменный характер налоговой ставки:

$$N_p^{(2)}(q, p_{ff}) = \sum_{j=1}^N \left( H(p_j \leq p_{ff}) H(p_j < p_j^{(\min)}) + H(p_j > p_{ff}) H(p_j - \Delta p_j(q, p_{ff}) < p_j^{(\min)}) \right); \quad (15)$$

$$S^{(2)}(q, p_{ff}) = \sum_{j=1}^N \Delta p_j(q, p_{ff}) H(p_j > p_{ff}), \quad (16)$$

где  $\Delta p_j(q, p_{ff}) = (p_j - p_{ff}) f_\varepsilon(p_j - p_{ff}, q)$  – абсолютная величина подоходного налога, уплачиваемого  $j$ -м налогоплательщиком. Из (15), (16) следует, что математические ожидания случайных величин  $N_p^{(2)}(q, p_{ff})$  и  $S^{(2)}(q, p_{ff})$  составляют:

$$\tilde{N}_p^{(2)}(q, p_{ff}) = \tilde{N} \int_0^{p_{ff}} \varphi_p(x)(1 - F_{\min}(x))dx + \tilde{N} \int_{p_{ff}}^{+\infty} \varphi_p(x)(1 - F_{\min}(x - (x - p_{ff}) f_\varepsilon(x - p_{ff}, q)))dx; \quad (17)$$

$$\tilde{S}^{(2)}(q, p_{ff}) = \tilde{N} \int_0^{+\infty} x \cdot f_\varepsilon(x, q) \varphi_p(x + p_{ff})dx. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) обобщают выражения (12) и (13) на случай переменной налоговой ставки. Они включают в себя (12), (13) в качестве частного случая, когда  $f_\varepsilon(p_j - p_{jf}, q) = \varepsilon = \text{const}$ .

Переход от «плоской» системы налогообложения с налоговой ставкой  $\varepsilon_0$  к обобщенной одноступенчатой прогрессивной системе налогообложения не будет сопровождаться увеличением количества бедных и уменьшением совокупного подоходного налога, если безналоговый минимум  $p_{jf}$  и вектор параметров  $q$  будут решениями системы неравенств

$$\tilde{N}_p^{(2)}(q, p_{jf}) < \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon_0); \quad \tilde{S}^{(2)}(q, p_{jf}) \geq \tilde{S}^{(0)}(\varepsilon_0), \quad (19)$$

которая является обобщением системы неравенств (14).

### Численный эксперимент

Покажем, что системы неравенств (9) и (14) действительно имеют решения для некоторых частных законов распределения доходов и прожиточного минимума налогоплательщиков. Предположим, что индивидуальный прожиточный минимум налогоплательщика на рассматриваемом промежутке времени имеет вырожденное распределение [7]:

$$F_{\min}(x) = H(x > p_0). \quad (20)$$

Это означает, что все налогоплательщики имеют один и тот же прожиточный минимум, равный  $p_0$ . В этом случае формулы (3), (7), (12) приобретают вид

$$\tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon) = \tilde{N} \cdot F_p\left(\frac{p_0}{1-\varepsilon}\right); \quad (21)$$

$$\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{jf}) = \tilde{N} \begin{cases} F_p\left(\frac{p_0}{1-\varepsilon}\right), & p_{jf} < p_0; \\ F_p\left(\frac{p_0}{1-\varepsilon}\right) + F_p(p_0) - F_p(p_{jf}), & p_0 \leq p_{jf} < \frac{p_0}{1-\varepsilon}; \\ F_p(p_0), & p_{jf} \geq \frac{p_0}{1-\varepsilon}; \end{cases} \quad (22)$$

$$\tilde{N}_p^{(2)}(\varepsilon, p_{jf}) = \tilde{N} \begin{cases} F_p\left(\frac{p_0 - \varepsilon p_{jf}}{1-\varepsilon}\right), & p_{jf} < p_0; \\ F_p(p_0), & p_{jf} \geq p_0. \end{cases} \quad (23)$$

Функция  $F_p(x)$  является неубывающей функцией своего аргумента. Поэтому, как видно из (21), (22), справедливы следующие соотношения:  $\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{jf}) = \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon)$  при  $p_{jf} < p_0$  и  $\tilde{N}_p^{(1)}(\varepsilon, p_{jf}) < \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon)$  в противоположном случае. Таким образом, если справедлив закон распределения (20) и осуществляется переход от «плоской» к одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения, то устанавливать необлагаемый налогом минимум меньше прожиточного минимума  $p_0$  не имеет смысла. Действительно, как уже говорилось выше, чтобы такой переход не уменьшил величину совокупного подоходного налога, налоговая ставка  $\varepsilon$  при одноступенчатой пропорциональной системе должна быть выше, чем при «плоской» системе. Но тогда, при выполнении неравенства  $p_{jf} < p_0$ , количество бедных станет больше, чем при «плоской» системе, что сделает бессмысленным переход к одноступенчатой пропорциональной си-

стеме налогообложения. И так, система неравенств (9) не имеет решения, если  $p_{ff} < p_0$ . В противоположном случае ее разрешимость существенно зависит от вида интегральной функции распределения  $F_p(x)$  доходов налогоплательщиков.

Сопоставление формул (21) и (23) показывает, что количество бедных при одноступенчатой прогрессивной системе налогообложения строго меньше, чем при «плоской», для любой величины безналогового минимума  $p_{ff}$ :  $\tilde{N}_p^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) < \tilde{N}_p^{(0)}(\varepsilon)$ . Более того, при  $p_{ff} \geq p_0$  количество бедных не зависит от налоговой ставки  $\varepsilon$  и равно величине  $\tilde{N} \cdot F_p(p_0)$ , которая в случае «плоской» системы реализуется только при нулевой налоговой ставке (см. формулу (21) при  $\varepsilon=0$ ). Вследствие этого одноступенчатая прогрессивная система предпочтительнее одноступенчатой пропорциональной, т. к. диапазон значений  $\varepsilon$  и  $p_{ff}$ , являющихся решениями системы неравенств (14), шире, чем соответствующий диапазон для системы неравенств (9).

Далее конкретизируем вид интегральной функции распределения  $F_p(x)$  доходов налогоплательщиков. Будем считать, что доходы налогоплательщиков имеют гамма-распределение [7]:

$$\varphi_p(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) p_1^\alpha} e^{-x/p_1} H(x \geq 0); F_p(x) = \frac{\gamma(\alpha, x/p_1)}{\Gamma(\alpha)} H(x \geq 0), \quad (24)$$

где  $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  – нижняя неполная гамма-функция;  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  – гамма-функция;  $\alpha$  и  $p_1$  – параметры формы и масштаба соответственно, которые связаны со средним доходом налогоплательщика соотношением  $\tilde{p} = \alpha p_1$ .

Варьирование параметра  $\alpha$  изменяет форму гамма-распределения (24) в широких пределах. При  $\alpha \leq 1$  гамма-распределение концентрируется вблизи  $x=0$ . Это значит, что подавляющее большинство налогоплательщиков (> 63 %) имеют доходы, меньшие среднего значения  $\tilde{p}$ . Если  $\alpha > 1$ , то гамма-распределение (24) становится унимодальным, концентрируясь вблизи моды  $(\alpha-1)p_1$ , которая при больших  $\alpha$  почти не отличается от математического ожидания  $\tilde{p}$ . В таком множестве налогоплательщиков доминирует средний класс: отсутствуют как очень бедные, так и очень богатые люди. Степень доминирования среднего класса тем выше, чем больше параметр формы  $\alpha$ .

Если доходы налогоплательщиков имеют гамма-распределение (24), то величина собираемого с них совокупного подоходного налога при разных системах налогообложения составляет (см. формулы (4), (8), (13)):

$$\tilde{S}^{(0)}(\varepsilon) = \alpha p_1 \varepsilon \tilde{N}; \quad (25)$$

$$\tilde{S}^{(1)}(\varepsilon, p_{ff}) = p_1 \varepsilon \tilde{N} \Gamma(\alpha+1, p_{ff}/p_1) / \Gamma(\alpha); \quad (26)$$

$$\tilde{S}^{(2)}(\varepsilon, p_{ff}) = \varepsilon \tilde{N} (p_1 \Gamma(\alpha+1, p_{ff}/p_1) - p_{ff} \Gamma(\alpha, p_{ff}/p_1)) / \Gamma(\alpha), \quad (27)$$

где  $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  – верхняя неполная гамма-функция.

Подстановка формул (20)–(27) в (9) и (14) приводит к сложным системам трансцендентных неравенств, которые могут быть решены только численно. На рис. 1 и 2 представлены результаты численного решения этих систем неравенств для случая, когда значения параметров математической модели (20)–(27) примерно равны значениям, актуальным для РФ.



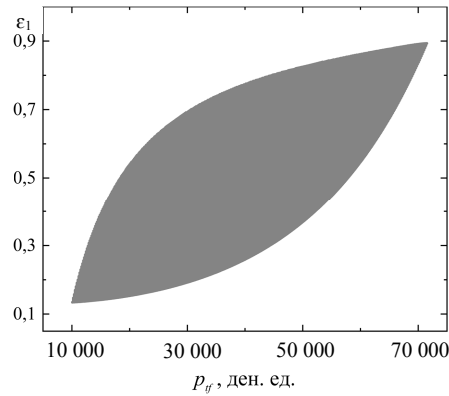


Рис. 1. Область решений системы неравенств (9): значения налоговой ставки  $\varepsilon_1$  и безналогового минимума  $p_{tf}$  в случае одноступенчатой пропорциональной системы налогообложения, при которых количество бедных меньше, а совокупный подоходный налог больше, чем при «плоской» системе налогообложения. Для численных расчетов использовалась математическая модель (20)–(22), (24)–(26) с параметрами  $\varepsilon_0 = 0,13$ ;  $p_0 = 10\,000$  ден. ед.;  $p_1 = 30\,000$  ден. ед.;  $\alpha = 2$

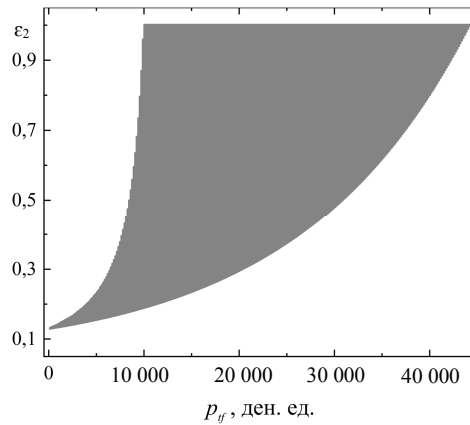


Рис. 2. Область решений системы неравенств (14): значения налоговой ставки  $\varepsilon_2$  и безналогового минимума  $p_{tf}$  в случае одноступенчатой прогрессивной системы налогообложения, при которых количество бедных меньше, а совокупный подоходный налог больше, чем при «плоской» системе налогообложения. Для численных расчетов использовалась математическая модель (20), (21), (23)–(25), (27) с параметрами  $\varepsilon_0 = 0,13$ ;  $p_0 = 10\,000$  ден. ед.;  $p_1 = 30\,000$  ден. ед.;  $\alpha = 2$

Границы областей на рис. 1 и 2 соответствуют знакам равенства в системах неравенств (9), (14). Поэтому чем дальше от границы находится точка внутри областей, изображенных на рис. 1 и 2, тем на большую величину уменьшается количество бедных и тем заметнее оказывается увеличение совокупного подоходного налога по сравнению с «плоской» системой налогообложения. На рис. 1 точки, удаленные от границы и находящиеся внутри выделенной области, имеют координату  $p_{tf}$  в несколько раз большую величины прожиточного минимума  $p_0$ . В то же время аналогичные точки на рис. 2 имеются даже при  $p_{tf} \approx p_0$ . Это значит, что переход от «плоской» к одноступенчатой пропорциональной системе налогообложения, сопровождающийся заметным уменьшением количества бедных, возможен только за счет освобождения от подоходного налога физических лиц, доходы которых заметно выше прожиточного минимума. Компенсировать такие потери и даже увеличить совокупный подоходный налог, не увеличивая существенно налоговую ставку, в этом случае можно лишь за счет увеличения налоговой нагрузки на богатых налогоплательщиков. Это безусловный недостаток, которого, как показывает рис. 2, лишена одноступенчатая прогрессивная система налогообложения. Таким образом, среди рассмотренных в настоящей работе двух систем налогообложения, альтернативных «плоской» системе, одноступенчатая прогрессивная система имеет явное преимущество, т. к. уменьшает количество бедных, не создавая новые виды социальной напряженности.

### Заключение

Главным результатом данной работы является построение вероятностной модели, показавшей, что переход от «плоской» к одноступенчатой пропорциональной и одноступенчатой прогрессивной системам подоходного налогообложения может сопровождаться уменьшением количества бедных и одновременным увеличением совокупного подоходного налога. Однако для корректного определения из систем неравенств (9), (14) величины безналогового минимума и налоговой ставки для физических лиц с доходами выше этого минимума необходимо знать плотности распределения вероятности доходов и прожиточного минимума налогоплательщиков, актуальные для рассматриваемого общества. Эмпирические оценки этих плотностей распределения легко могут быть найдены в ходе стандартного статистического исследования множества налогоплательщиков. Если заменить функции  $\varphi_p(x)$  и  $F_{\min}(x)$  их эмпирическими оценками в формулах (3), (4), (7), (8), (12) и (13), то получатся присущие данному множеству налогоплательщиков зависимости количества бедных и совокупного подоходного налога от налоговой ставки и безналогового минимума. Эти зависимости позволят отыскивать решения систем неравенств (9), (14), полностью соответствующие экономическим реалиям рассматриваемого общества. Должностным лицам, располагающим допустимыми для данного общества, с точки зрения неравенств (9), (14), значениями величин  $\varepsilon$  и  $p_f$ , будет проще принять верное решение о целесообразности перехода от «плоской» системы налогообложения к одноступенчатой пропорциональной или одноступенчатой прогрессивной системе. При этом, возможно, им придется использовать дополнительные экономико-социальные соображения, не учтенные в рассмотренной вероятностной модели.

Другим важным результатом данной работы является обобщение одноступенчатой прогрессивной системы налогообложения на случай переменной налоговой ставки. Вероятностная модель (15)–(18) с помощью системы неравенств (19) дает возможность осуществить экономически и социально обоснованный переход к любой прогрессивной системе подоходного налогообложения со сколь угодно сложной зависимостью налоговой ставки от дохода налогоплательщика.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подоходный налог // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Подоходный\\_налог](https://ru.wikipedia.org/wiki/Подоходный_налог) (дата обращения: 22.05.2020).
2. Прогрессивное налогообложение // Википедия. Свободная энциклопедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Прогрессивное\\_налогообложение](https://ru.wikipedia.org/wiki/Прогрессивное_налогообложение) (дата обращения: 22.05.2020).
3. Осипова Е. С. Прогрессивное налогообложение доходов как условие социальной справедливости // *Налоги*. 2016. № 1. С. 10–16.
4. Семенхин В. В. Налог на доходы физических лиц. М.: ИД «Гросс-Медиа»: РОСБУХ, 2018. 1007 с.
5. *Российский статистический ежегодник*. 2019: стат. сб. М.: Росстат, 2019. 708 с.
6. Михеев А. В. Вероятностный подход к математическому описанию рыночного равновесия // *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика*. 2018. № 4. С. 90–98.
7. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороходов А. В. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

Статья поступила в редакцию 25.05.2020

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Михеев Андрей Вячеславович** – Россия, 420015, Казань; Казанский национальный исследовательский технологический университет; канд. физ.-мат. наук; доцент; доцент кафедры высшей математики; [veehima@gmail.com](mailto:veehima@gmail.com).



## PROBABILITY MODEL OF POVERTY CALCULATION SUBJECT TO DIFFERENT FORMS OF INCOME TAXATION

A. V. Mikheev

Kazan National Research Technological University,  
Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation

**Abstract.** The article highlights a probabilistic model constructed for calculating the number of poor and the total income tax levied on all taxpayers under different income tax systems. There is considered the proportional income tax system adopted in the Russian Federation, as well as single-stage systems with both fixed and variable tax rates, in which individuals with low incomes are exempted from income tax. For these tax systems there have been found the dependences of the expected value of the number of the poor and the total income tax on the tax rate, tax-free minimum, and also on the laws of probabilities distribution of total income and the living wage of an individual. A numerical simulation of the found dependences was carried out. The conditions under which the abolition of income tax for individuals with low incomes reduces the number of poor were determined. Mathematical criteria are formulated with the help of which it is possible to assess the feasibility of moving from a proportional system to single-stage income tax systems.

**Key words:** income tax, tax rate, number of the poor, tax-free minimum, living wage, probability density function, expected value.

**For citation:** Mikheev A. V. Probability model of poverty calculation subject to different forms of income taxation. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2020;4:101-111. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2020-4-101-111.

### REFERENCES

1. Podokhodnyi nalog [Income tax]. *Vikipediia. Svobodnaia entsiklopediia*. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Podokhodnyi\\_nalog](https://ru.wikipedia.org/wiki/Podokhodnyi_nalog) (accessed: 22.05.2020).
2. Progressivnoe nalogooblozhenie [Progressive taxation]. *Vikipediia. Svobodnaia entsiklopediia*. Available at: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Progressivnoe\\_nalogooblozhenie](https://ru.wikipedia.org/wiki/Progressivnoe_nalogooblozhenie) (accessed: 22.05.2020).
3. Osipova E. S. Progressivnoe nalogooblozhenie dokhodov kak uslovie sotsial'noi spravedlivosti [Progressive income taxation as condition of social justice]. *Nalogi*, 2016, no. 1, pp. 10-16.
4. Semenikhin V. V. *Nalog na dokhody fizicheskikh lits* [Personal income tax]. Moscow, ID «Gross-Media»: ROSBUKh, 2018. 1007 p.
5. *Rossiiskii statisticheskii ezhegodnik. 2019: statisticheskii sbornik* [Russian statistical yearbook. 2019: statistical collection]. Moscow, Rosstat Publ., 2019. 708 p.
6. Mikheev A. V. Veroiatnostnyi podkhod k matematicheskomu opisaniiu rynochnogo ravnovesiia [Probabilistic approach to mathematical description of market equilibrium]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naiia tekhnika i informatika*, 2018, no. 4, pp. 90-98.
7. Koroliuk V. S., Portenko N. I., Skorokhodov A. V. i dr. *Spravochnik po teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistike* [Probability theory handbook and mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 640 p.

The article submitted to the editors 25.05.2020

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Mikheev Andrej Vyacheslavovich** – Russia, 420015, Kazan; Kazan National Research Technological University; Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor; Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics; veehima@gmail.com.

