

# УПРАВЛЕНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, АВТОМАТИЗАЦИЯ

DOI: 10.24143/2072-9502-2020-2-7-18

УДК 62-52.001.24

## О НЕКОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

*Г. К. Аязян, Е. В. Таушева*

*Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
Уфа, Российская Федерация*

Решается задача параметрического синтеза ПИД-регуляторов целого и дробного порядка. Рассмотрены методики синтеза – на заданные степень и показатели колебательности ПИД-регуляторов целого и дробного порядка. Разработаны алгоритмы расчета предельных значений коэффициента усиления дифференциальной части регулятора, при которых граница области заданного запаса устойчивости имеет точку возврата. Применение критерия компенсации низкочастотных возмущений позволяет рассчитывать предельные значения степени колебательности и показателей колебательности. Для реализации предложенных алгоритмов разработаны программы в среде пакета символьных вычислений Maple. Применение разработанных алгоритмов позволяет сузить область поиска оптимальных параметров ПИД-контроллеров.

**Ключевые слова:** ПИД-регулятор, дробный порядок, степень колебательности, показатель колебательности, Maple.

**Для цитирования:** Аязян Г. К., Таушева Е. В. О некоторых ограничениях при параметрическом синтезе ПИД-регуляторов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 2. С. 7–18. DOI: 10.24143/2072-9502-2020-2-7-18.

### Введение

Ведущее место среди регуляторов, используемых в промышленных системах управления, по-прежнему занимают ПИД-регуляторы.

Процедура параметрического синтеза ПИД-регуляторов сводится к расчету трех настроечных параметров. Это коэффициент усиления  $k_p$ , время интегрирования  $T_i$  и время дифференцирования  $T_d$ , или эквивалентные им параметры  $k_1 = k$ ,  $k_0 = k_1/T_i$ ,  $k_2 = k_1 \cdot T_d$ . Часто  $T_d$  или  $k_2$  принимаются постоянными или определяются по формулам  $T_d = \alpha T_i$  и  $k_2 = \alpha k_1^2/k_0$ . Параметр  $\alpha$  выбирается, например, в диапазоне  $\alpha = 0,15 \div 0,6$ , причем часто эмпирически. В [1] значение  $\alpha$  принимается равным  $\alpha = 0,25$ . В [2–12] приведены значения  $T_i$  и  $T_d$  для различных методик синтеза ПИД-регуляторов. В [13] на базе критерия компенсации низкочастотных возмущений (КНВ) [14] получен алгоритм, позволяющий однозначно определять  $k_2$  как функцию  $k_1$ ,  $k_0$  и параметров модели объекта. На этой основе разработан алгоритм параметрического синтеза ПИД-регулятора с идеальным дифференциатором на заданную степень колебательности  $m \geq m_{\text{зад}}$ . Здесь  $m = \max | \text{Re } s_i / \text{Im } s_i |$ , а  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – корни характеристического уравнения замкнутой системы регулирования. В [15, 16] метод использован для синтеза идеального ПИД-регулятора, с ограничениями на максимум функции чувствительности  $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|$  или дополнительной чувствительности  $M_p = \max_{\omega} |T(j\omega)|$  (показателей колебательности).

В [17, 18] показано, что при расчете настроек ПИД-регулятора на заданную степень колебательности  $m \geq m_{\text{зад}}$  и  $k_2 = \alpha k_1^2 / k_0$  вид кривой  $D$ -разбиения (границы области заданного запаса устойчивости) и качество регулирования существенно зависят от значения параметра  $\alpha$ . Кривая  $D$ -разбиения строится в координатах  $(k_1 = k_1(\omega), k_0 = k_0(\omega))$  (рис. 1) как функция частоты  $\omega$  [13, 17].

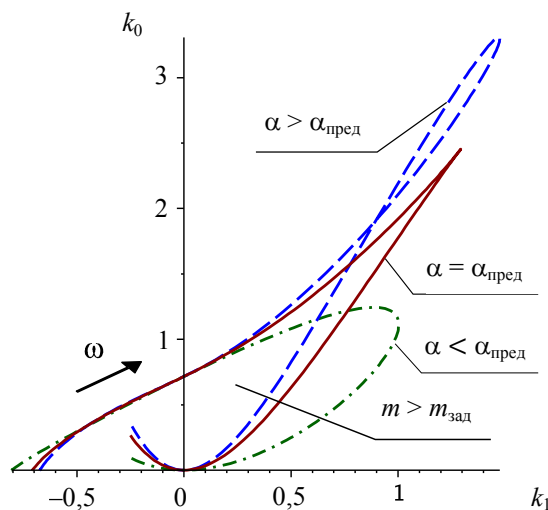


Рис. 1.  $D$ -разбиение для разных  $\alpha$

Обычный вид кривой, ограничивающей область  $m \geq m_{\text{зад}}$ , изображен на рис. 1 штрихпунктирной линией. С увеличением  $\alpha$  возможно самопересечение кривой  $D$ -разбиения, что соответствует пунктирной линии на рис. 1. Это сужает область заданного запаса устойчивости. И, наконец, существует некоторое предельное значение  $\alpha = \alpha_{\text{пред}}$ , когда образуется точка возврата. Для типовых объектов и значений степени колебательности  $m = 0,221$  и  $m = 0,366$  в [17, 18] определены значения  $\alpha = \alpha_{\text{пред}}$  и предложен алгоритм решения задачи.

В [19] приведен пример системы с ПИ-регулятором и ограничением на максимум  $M_s$ , когда также имеется самопересечение граничной кривой.

Как показано ниже, для того же примера с ПИД-регулятором при выборе  $k_2$  по критерию КНВ также имеется самопересечение граничной кривой. В настоящей работе предложен новый, достаточно простой алгоритм определения  $\alpha = \alpha_{\text{пред}}$  для ПИД-регуляторов целого и дробного порядка, отвечающих точке возврата при расчете систем управления на заданную степень колебательности и максимум функций чувствительности. Для случая, когда коэффициент  $k_2$  рассчитывается по критерию КНВ, решается задача определения предельных значений  $m = m_{\text{пред}}$  и  $M_s = M_{\text{пред}}$  или  $M_p = M_{\text{пред}}$ , соответствующих точке возврата.

### Постановка задачи и алгоритм решения

Рассматривается система регулирования с одним входом и одним выходом. Передаточная функция регулятора описывается передаточной функцией

$$W_p = k_1 \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\delta} + T_d s^\beta \right) = k_1 + \frac{k_0}{s^\delta} + k_2 s^\beta, \quad (1)$$

где  $k_0, k_1, k_2$  — коэффициенты усиления — настроечные параметры регулятора;  $T_i = k_1/k_0$ ,  $T_d = k_2/k_1$  — время интегрирования и дифференцирования соответственно; если  $\delta$  и  $\beta$  равны единице — регулятор целого порядка, если дробным неотрицательным действительным числом — регулятор дробного порядка.

Рассматриваются модели объектов с передаточными функциями вида

$$W_y(s) = \frac{1}{s^r} W_{y1}(s) = \frac{1}{s^r} \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} e^{-s\tau},$$

где  $W_{y1}(s)$  – пропорциональная часть модели объекта,  $|W_{y1}(0)| = |b_0/a_0| < \infty$ ;  $r = 0, 1$ ;  $a_i, b_i$  – постоянные коэффициенты;  $a_n, b_0 > 0$ ;  $m \leq n$ ;  $\tau$  – запаздывание, константа, в частном случае может равняться нулю.

Настройки регулятора определяются из условия минимума интегральных критериев качества при ограничении на заданную степень колебательности  $m$ , или на функции чувствительности  $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|$  и дополнительной чувствительности  $M_p = \max_{\omega} |T(j\omega)|$ .

Обычно задача расчета настроек разбивается на два этапа: 1) построение в плоскости настроек регулятора  $k_1, k_0$  границы области заданного запаса устойчивости; 2) определение на границе области точки, минимизирующей критерий оптимальности [1, 13].

Коэффициенты дифференциальной части  $k_2$  или  $T_i$  регулятора выбираются двумя способами:

$$k_2 = \alpha k_1^2 / k_0 \quad \text{или} \quad T_d = \alpha T_i - \tag{2}$$

традиционный способ – и по критерию КНВ [13]:

$$\begin{aligned} k_0 &= \max k_0; \\ k_2 &= \alpha(\alpha_1 + k_1)^2 / k_0 + \alpha_2 k_0 + \alpha_3; \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\alpha = 1/2$ ;  $\alpha_1 = 1/\mu_0$ ;  $\alpha_2 = (\mu_1^2 - 2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_2) / 2 \cdot \mu_0^2$ ;  $\alpha_3 = \mu_1 / \mu_0^2$ ;  $\mu_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} W_{y1}(s) \Big|_{s=0}$ ;  $k = 0, 1, 2$  – моменты передаточной функции  $W_{y1}$ .

Первое ограничение в (3) соответствует минимуму линейного интегрального критерия качества  $IE$  [1]. Формулы для  $\alpha_i, i \in 1, 3$ , зависят от коэффициентов передаточной функции объекта (1) и точки приложения возмущения. Для возмущения, действующего на входе объекта,  $\alpha_2 = 0$ , для астатического объекта  $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$  и  $\alpha_3 = -1/\mu_0$  [13]. Если  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  и  $\alpha = \text{const}$ , получим известную формулу  $k_2 = \alpha k_1^2 / k_0, \alpha > 0$ . В дальнейшем ограничимся задачей компенсации возмущения действующего на входе объекта. Таким образом, при использовании КНВ выбор  $k_2$  зависит от свойств объекта и автоматически решается проблема выбора  $k_2$ . Причиной появления самопересечения являются завышенные значения  $m$  и, как правило, чрезмерно заниженные значения  $M_s$  и  $M_p$ . При синтезе ПИД-регулятора по методу доминирующих корней могут появиться корни с большой колебательностью [1].

Таким образом, задача расчета предельного значения  $\alpha$  и предельных значений запасов устойчивости  $m = m_{\text{пред}}$  и  $M_s = M_{s_{\text{пред}}}$ ,  $M_p = M_{p_{\text{пред}}}$  имеет важное практическое значение. Решение перечисленных задач приводится ниже.

#### Алгоритм расчета на заданную степень колебательности, случай $\alpha = \text{const}$

**Система с ПИД-регулятором целого порядка.** Уравнение границы области  $m \geq m_{\text{зад}}$  (кривую  $D$ -разбиения) находим из характеристического уравнения замкнутой системы подстановкой  $s = -m\omega + j\omega$ :

$$W_p(s) \cdot W_y(s) + 1 = (k_1 + k_0/s + k_2 s) W_y(s) + 1 = 0,$$

где (здесь и в дальнейшем)  $m = m_{\text{зад}}$ ;  $\omega \geq 0$ ;  $j = \sqrt{-1}$ .

В результате получаем уравнение

$$\left( k_1 + \frac{k_0}{-m\omega + j\omega} + k_2(-m\omega + j\omega) \right) (U_1(m, \omega) + jU_2(m, \omega)) + 1 = 0, \quad (4)$$

где  $W_y(-m\omega + j\omega) = U_1(m, \omega) + jU_2(m, \omega)$  - расширенная амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) объекта.

Выделяя в (4) вещественную и мнимую часть и переходя к АФХ объекта, получим

$$\begin{aligned} F_1 &= k_0 - m\omega k_1 + \omega^2(m^2 - 1)k_2 - m\omega V_1 - \omega V_2 = 0; \\ F_2 &= \omega k_1 - 2m\omega^2 k_2 + \omega V_1 - m\omega V_2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $W_y^{-1}(s)_{s=-m\omega+j\omega} = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega) = V_1 + jV_2$  - инверсная АФХ объекта.

Решение системы типа (5) рассмотрено в [13] и имеет вид

$$k_0 = (-B - \sqrt{B^2 - 4AC}) / (2A); \quad k_1 = 2mk_0 / (\omega(m^2 + 1)) - V_1 - mV_2, \quad (6)$$

где  $A = \alpha(4\alpha m^2 - 1 - m^2) / (m^2 + 1)^2$ ,  $B = \alpha\omega(-4\alpha m V_1 + (1 + m^2 - 4\alpha m^2)V_2) / (m^2 + 1)$ ,  $C = \alpha\omega^2(V_1 + mV_2)^2$ .

Задаваясь  $\omega$  из (6), находим  $k_0$ , затем  $k_1$  и строим кривую  $D$ -разбиения.

Рассмотрим теперь задачу определения предельного  $\alpha$ .

В точке возврата кривой  $D$ -разбиения справедливы равенства  $dk_0/d\omega = dk_1/d\omega = 0$  [17, 20, 21]. Дифференцируя уравнения (5) по  $\omega$ , считая  $k_0$  и  $k_1$  функциями  $\omega$ , получим

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{\partial F_1}{\partial k_0} \frac{dk_0}{d\omega} + \frac{\partial F_1}{\partial k_1} \frac{dk_1}{d\omega} + \frac{dF_1}{d\omega} = 0; \\ F_4 &= \frac{\partial F_2}{\partial k_0} \frac{dk_0}{d\omega} + \frac{\partial F_2}{\partial k_1} \frac{dk_1}{d\omega} + \frac{dF_2}{d\omega} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку  $dk_0/d\omega = dk_1/d\omega = 0$ , уравнения (7) упрощаются. Присоединяя к ним уравнения (5), получим четыре уравнения для расчета критических параметров ( $k_0, k_1, k_2, \omega$ ):

$$\begin{aligned} F_1 &= k_0 - m\omega k_1 + \omega^2(m^2 - 1)k_2 - m\omega V_1 - \omega V_2 = 0; \\ F_2 &= \omega k_1 - 2m\omega^2 k_2 + \omega V_1 - m\omega V_2 = 0; \\ F_3 &= dF_1/d\omega = -mk_1 + 2\omega(m^2 - 1)k_2 - m(V_1 + \omega V_1^1) - V_2 - \omega V_2^1 = 0; \\ F_4 &= dF_2/d\omega = \omega k_1 - 2m\omega^2 k_2 + V_1 - mV_2 + \omega(V_1^1 - mV_2^1) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $W_y^{-1}(s)_{s=-m\omega+j\omega} = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega) = V_1 + jV_2$ ;  $V_1^1 = dV_1/d\omega$ ;  $V_2^1 = dV_2/d\omega$ .

Система (8) линейна относительно  $k_1, k_0, k_2$ , поэтому сначала находится значение  $k_2$ , а затем по формуле (2) рассчитывается  $\alpha$ . Ранг ее матрицы коэффициентов равен трем, поскольку минор 3-го порядка отличен от нуля, если  $\omega \neq 0$ :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & -m\omega & \omega^2(m^2 - 1) \\ 0 & \omega & -2m\omega^2 \\ 0 & -m & 2\omega(m^2 - 1) \end{vmatrix} = -2\omega^2.$$

И система совместна, если определитель  $\Delta$  ее расширенной матрицы равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m\omega & \omega^2(m^2 - 1) & -\omega(mV_1 + V_2) \\ 0 & \omega & -2m\omega^2 & \omega(V_1 - mV_2) \\ 0 & -m & 2\omega(m^2 - 1) & -m(V_1 + \omega V_1^1) - V_2 - \omega V_2^1 \\ 0 & \omega & -4m\omega & V_1 - mV_2 + \omega(V_1^1 - mV_2^1) \end{vmatrix}.$$

Вычисляя  $\Delta$ , после несложных преобразований получим

$$\Delta = -2\omega^2(m^2 + 1)(\omega V_1^1 + mV_2) = 0. \quad (9)$$

Частота  $\omega$  находится как корень уравнения (9). Для объектов 3-го порядка без запаздывания и некоторых объектов 4-го порядка частота может быть выражена в явном виде как функция  $m$  и параметров объекта, как показано ниже в примерах 1.1, 1.2. Алгоритм решения не зависит от коэффициентов передаточной функции объекта.

Коэффициенты регулятора находятся решением первых трех уравнений (8), например методом Крамера, а  $\alpha_{\text{пред}}$  – из формулы (2):

$$\begin{aligned} k_0 &= -0,5\omega(m^2 + 1)((m^2 - 1)V_2 + \omega(mV_1^1 + V_2^1)); \\ k_1 &= -(V_1 + m^3V + \omega m(mV_1^1 + V_2^1)^2); \\ k_2 &= -0,5((m^2 + 1)V_2 + \omega(mV_1^1 + V_2^1))/2\omega; \\ \alpha_{\text{пред}} &= \frac{(m^2 + 1)(\omega(mV_1^1 + V_2^1) + (m^2 + 1)V_2)((m^2 - 1)V_2 + \omega(mV_1^1 + V_2^1))}{4(V_1 + m^3V_2 + m\omega(mV_1^1 + V_2^1))^2}. \end{aligned}$$

**Система управления с ПИД-регулятором дробного порядка.** Амплитудно-фазовая характеристика регулятора дробного порядка после подстановки  $s = -m\omega + j\omega$  принимает вид

$$W_p(m, \omega) = k_1 + k_0\omega^{-\delta}A + k_2\omega^{\beta}B + I(k_0\omega^{-\delta}C + k_2\omega^{\beta}D), \quad (10)$$

где  $A = (m^2 + 1)^{-\delta/2} \cos(0,5\pi\delta + \delta \cdot \arctan(m))$ ;  $B = (m^2 + 1)^{-\beta/2} \cos(0,5\pi\delta + \beta \cdot \arctan(m))$ ;  
 $C = (m^2 + 1)^{-\delta/2} \sin(0,5\pi\delta + \delta \cdot \arctan(m))$ ;  $D = (m^2 + 1)^{-\beta/2} \sin(0,5\pi\delta + \beta \cdot \arctan(m))$ .

Метод решения аналогичен случаю ПИД-регулятора целого порядка.

Уравнения (8) и расширенный определитель системы приводятся к виду

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 + k_0\omega^{-\delta}A + k_2\omega^{\beta}B + V_1 = 0; \\ F_2 &= k_0\omega^{-\delta}C + k_2\omega^{\beta}D + V_2 = 0; \\ F_3 &= -k_0\omega^{-\delta}\delta A + k_2\omega^{\beta}\beta B + \omega V_1^1 = 0; \\ F_4 &= -k_0\omega^{-\delta}\delta C + k_2\omega^{\beta}\beta D + \omega V_2^1 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta = -C\beta V_2^1\omega + C\beta V_1^1 D\omega + \delta AD\beta V_2 - \delta AD V_2^1\omega + \delta CD V_1^1\omega - \delta C\beta B V_2. \quad (12)$$

Параметры регулятора находятся решением первых трех уравнений (11):

$$\begin{aligned} k_0 &= (DV_1^1\omega - \beta B V_2)\omega^{\delta}/\Delta x; \quad k_2 = -(CV_1^1\omega + V_2\delta A)\omega^{-\beta}/\Delta x; \\ k_1 &= (-V_1(C\beta + AD\delta) + V_2AB(\beta + \delta) + \omega V_1^1(BC - AD))/\Delta x; \\ \Delta x &= (\delta AD + \beta CB). \end{aligned}$$

Значение  $\alpha$  рассчитывается по формуле  $\alpha_{\text{пред}} = k_0 k_2 / k_1^2$ ,  $\omega$  – как корень (12).

### Расчет на заданные функции чувствительности, $\alpha = \text{const}$

Граница области  $M \leq M_{\text{зад}}$  в плоскости параметров настройки определяется решением системы уравнений [15, 16]

$$\begin{cases} A_3(\omega, k_0, k_1, \alpha) = M_{\text{зад}}; \\ dA_3(\omega, k_0, k_1, \alpha)/d\omega = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где  $M_{\text{зад}}$  заданное значение  $M_s$  или  $M_p$ ,  $A_3(\omega, k_0, k_1, k_2)$  – соответствующая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) замкнутой системы.

Уравнения (13) есть необходимое условие максимума АЧХ, а также условия касания АФХ разомкнутой системы «запретной окружности» [1, 15]. На рис. 2 приведена кривая заданного запаса устойчивости  $M = M_{\text{зад}}$  (рис. 2, а) и АЧХ замкнутой системы (рис. 2, б) для случая, когда  $\alpha > \alpha_{\text{пред}}$ .

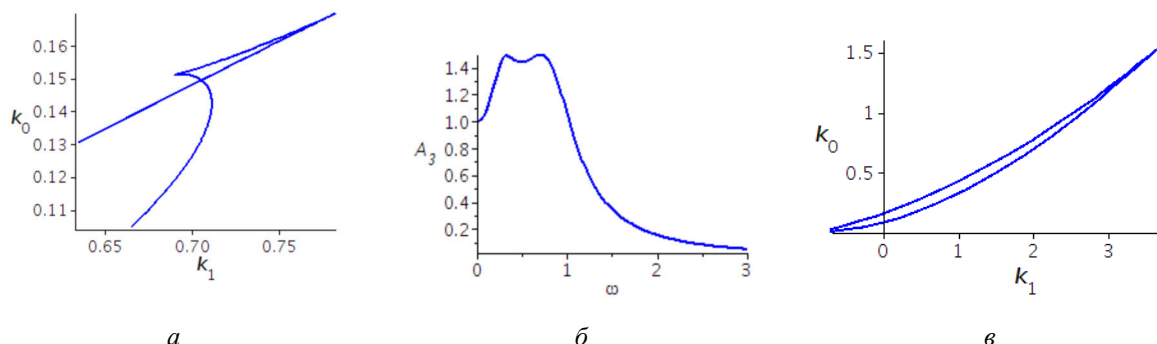


Рис. 2. Кривые для заданного показателя колебательности: кривые  $M = M_{\text{зад}}$  (а, в); АЧХ замкнутой системы (б)

Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы имеет два резонансных пика одинаковой амплитуды при двух разных частотах. В точке возврата (рис. 2, в), когда  $\alpha = \alpha_{\text{пред}}$ , пики сливаются, гладкость АЧХ в точке резонанса увеличивается.

Условия наличия точки возврата для рассматриваемого случая можно получить, дополнив систему (13) двумя уравнениями [20–22]:

$$\begin{aligned} A_3(\omega, k_0, k_1, k_2) &= M_{\text{зад}}; \\ dA_3(\omega, k_0, k_1, k_2)/d\omega &= 0; \\ d^2 A_3(\omega, k_0, k_1, k_2)/d\omega^2 &= 0; \\ d^3 A_3(\omega, k_0, k_1, k_2)/d\omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Имеем четыре уравнения относительно четырех неизвестных  $\omega, k_0, k_1, k_2$ .

Здесь, как и в предыдущем случае, мы для простоты вместо  $\alpha$  рассматриваем  $k_2$ . Значение  $\alpha_{\text{пред}}$  рассчитывается по формуле  $\alpha_{\text{пред}} = k_0 k_2 / k_1^2$ .

После подстановки в (14) выражений для частотных характеристик объекта и регулятора уравнения (14) принимают вид

$$\begin{aligned} S_1 &= Ak_0^2 - 2k_0k_2 + Bk_0 + k_1^2 + Ck_1 + Dk_2^2 + Ek_2 + F = 0; \\ S_2 &= dS_1/d\omega = A_1k_0^2 + B_1k_0 + C_1k_1 + D_1k_2^2 + E_1k_2 + F_1 = 0; \\ S_3 &= d^2 S_1/d\omega^2 = A_2k_0^2 + B_2k_0 + C_2k_1 + D_2k_2^2 + E_2k_2 + F_2 = 0; \\ S_4 &= d^3 S_1/d\omega^3 = A_3k_0^2 + B_3k_0 + C_3k_1 + E_3k_2 + F_3 = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где  $A = 1/\omega^2$ ;  $B = -2aV_2/\omega$ ;  $C = 2aV_1$ ;  $D = \omega^2$ ;  $E = 2a\omega \cdot V_2$ ;  $F = (a^2 - R^2)(V_1^2 + V_2^2)$ ;  $A_k = d^k A/d\omega^k$ ;  $B_k = d^k B/d\omega^k$ ;  $C_k = d^k C/d\omega^k$ ;  $D_k = d^k D/d\omega^k$ ;  $E_k = d^k E/d\omega^k$ ;  $F_k = d^k F/d\omega^k$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $W_y^{-1}(j\omega) = V_1(\omega) + jV_2(\omega)$  – инверсная АФХ объекта;  $a = M_p^2/(M_p^2 - 1)$ ;  $R = M_p/(M_p^2 - 1)$  и  $a^2 - R^2 = a$ , если  $M_{\text{зад}} = M_p$  и  $a = 1$ ;  $R = 1/M_s$ , если  $M_{\text{зад}} = M_s$ .

Система (15) не линейна относительно  $\omega, k_0, k_1, k_2$ . Для ее решения желательно задать диапазон начальных значений переменных. Для этого рассчитывается граница области заданно-

го запаса устойчивости в плоскости  $(k_1, k_0)$  для нескольких значений  $\alpha$ . Для ее построения достаточно уравнений (13) или двух первых уравнений системы (15) после подстановки  $\alpha = k_0 k_2 / k_1^2$ . Метод решения этих уравнений рассмотрен в [15, 16].

Методика легко распространяется на случай ПИД-регулятора дробного порядка.

### Алгоритм расчета предельных значений степени колебательности и функций чувствительности, случай КНВ

В рассматриваемом случае проблемы выбора  $k_2$  решаются автоматически, однако остается проблема предельных значений запасов устойчивости. Как отмечалось выше, при необоснованном выборе заданного значения степени колебательности  $m$  или показателей колебательности  $M_s, M_p$  возникают точки возврата или самопересечения граничных кривых. Алгоритм расчета предельных значений основан на уравнениях (8), (11) и (15).

В общем виде соответствующие уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1(k_1, k_0, X, \omega, \beta, \delta) &= 0; \\ S_2(k_1, k_0, X, \omega, \beta, \delta) &= 0; \\ S_3(k_1, k_0, X, \omega, \beta, \delta) &= 0; \\ S_4(k_1, k_0, X, \omega, \beta, \delta) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\beta$  и  $\delta$  известны, а  $X$  – искомые предельные значения  $m_{\text{пред}}$  или  $M_s, M_p$ .

**Алгоритм расчета предельной степени колебательности регулятора дробного порядка.** Подставляя в уравнения (11) выражение для  $k_2$  из (3), получим

$$\begin{aligned} S_1 &= 0,5\omega^\beta Bk_1^2 + k_0 k_1 + \alpha_1 \omega^\beta Bk_1 + (\alpha_2 \omega^\beta B + \omega^{-\delta} A)k_0^2 + (V_1 + \alpha_3 \omega^\beta B)k_0 + 0,5\alpha_1^2 \omega^\beta B = 0; \\ S_2 &= 0,5\omega^\beta Dk_1^2 + \alpha_1 \omega^\beta Dk_1 + (\alpha_2 \omega^\beta D + \omega^{-\delta} C)k_0^2 + (V_2 + \alpha_3 \omega^\beta D)k_0 + 0,5\alpha_1^2 \omega^\beta D = 0; \\ S_3 &= (0,5k_1 + \alpha_1)\omega^{\beta-1} \beta Bk_1 + (\alpha_2 \omega^{\beta-1} \beta B - \omega^{-(1+\delta)} \delta A)k_0^2 + (V_1^1 + \alpha_3 \omega^{\beta-1} \beta B)k_0 + 0,5\alpha_1^2 \omega^{\beta-1} \beta B = 0; \\ S_4 &= (0,5k_1 + \alpha_1)\omega^{\beta-1} \beta Dk_1 + (\alpha_2 \omega^{\beta-1} \beta D - \omega^{-(1+\delta)} \delta C)k_0^2 + (V_2^1 + \alpha_3 \omega^{\beta-1} \beta D)k_0 + 0,5\alpha_1^2 \omega^{\beta-1} \beta D = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $A, B, C, D$  определяются формулами (10) и зависят от степени колебательности  $m$ ,  $W_y^{-1}(s)_{s=-m\omega+j\omega} = V_1(m, \omega) + jV_2(m, \omega) = V_1 + jV_2$ ;  $V_1^1 = dV_1/d\omega$ ;  $V_2^1 = dV_2/d\omega$ ;  $V_1, V_2$  и их производные  $V_1^1, V_2^1$  также зависят от  $m$ .

Для оценки начальных приближений можно построить серию кривых равного запаса устойчивости для нескольких значений  $m$  в плоскости  $(k_1, k_0)$ .

Значения  $k_0$  и  $k_1$  находятся как функции  $\omega$  решением первых двух уравнений (16) методом исключения, описанным в [13], аналогичным решением уравнений (6).

**Алгоритм расчета предельного значения функции чувствительности  $M_s$  и  $M_p$ .** Ограничимся случаем ПИД-регулятора целого порядка. За основу примем уравнения (15). Отметим особенность формул для коэффициентов в (15). В случае если решается задача определения  $M_s = M_{\text{пред}}$ , в формулах (15)  $a = 1$ , а  $M_s$  входит лишь в выражения для  $F, \dots, F_3$  в виде сомножителя  $X = 1 - 1/M_s^2$ . Определив  $X$ , найдем  $M_s = M_{\text{пред}}$ . В случае если определяется  $M_p = M_{\text{пред}}$ , учтем, что  $a^2 - R^2 = a$ . Тогда, вычислив  $a = M_p^2 / (M_p^2 - 1)$ , находим  $M_p$ . Подставляя  $k_2$  из (3) в уравнения (15), получим систему из четырех уравнений относительно неизвестных  $(k_0, k_1, \omega, X)$ , а затем  $M_s = M_{\text{пред}}$  или  $M_p = M_{\text{пред}}$ .

Для определения начальных значений переменных по уравнениям (13) строится семейство кривых равного значения запасов устойчивости.

В случае ПИД-регулятора дробного порядка алгоритм решения задачи не изменяется, усложняется лишь вид коэффициентов уравнений.

### Примеры

Рассмотренные задачи решались с помощью программ, разработанных в среде пакета символьных вычислений Maple.

1. Задана степень колебательности  $m$ . Определение  $\alpha_{\text{пред}}$ .

1.1. Объект  $W^{-1}(s) = s(Ts + 1)^2$ , ПИД-регулятор целого порядка.

$$\Delta = -8T(m^2 + 1)(2Tm\omega - 1) = 0 \Rightarrow \omega_{\text{пред}} = 1/(2Tm), k_0 = (1 + 1/m^2)^2 / (16T^2);$$

$$k_1 = (1 + 1/m^2)/(2T); k_2 = (1 + 1/m^2)/2; \alpha_{\text{пред}} = (1 + 1/m^2)/8.$$

1.2. Объект  $W^{-1}(s) = (Ts + 1)^3$ , ПИД-регулятор целого порядка.

$$\Delta = -4\omega^4(m^2 + 1)T^2(4Tm\omega - 3); \omega_{\text{пред}} = 3/(4Tm);$$

$$k_0 = 81(1 + 1/m^2)^2 / (256T); k_1 = (11 + 27/m^2)/16; k_2 = 3T(1 + 3/m^2)/8;$$

$$\alpha_{\text{пред}} = 243(m^2 + 3)(m^2 + 1)^2 / (8m^2(11m^2 + 27)^2).$$

1.3. Объект  $W^{-1}(s) = s(Ts + 1)^3$ , ПИД-регулятор дробного порядка;  $m = 0,25$ ;  $T = 2$ ;  $\delta = 0,85$ ;  $\beta = 1,1$ .

$$\omega = 0,8758 \cdot T^{-1} = 0,4379; k_0 = 1,2393 \cdot T^{-1,85} = 0,3438;$$

$$k_1 = 1,7217 \cdot T^{-1} = 0,8608; k_2 = 3,3337 \cdot T^{0,1} = 3,5730; \alpha_{\text{пред}} = 1,6575.$$

2. Задан показатель колебательности  $M_p$ . Определение  $\alpha_{\text{пред}}$ .

Объект  $W_y^{-1}(s) = s(Ts + 1)^3$ , ПИД-регулятор целого порядка.  $M_p = 1,5$ .

$$\alpha_{\text{пред}} = 0,3099; k_0 = 0,1108; k_1 = 0,6550; k_2 = 1,1998; \omega_{\text{пред}} = 0,4534.$$

При  $\alpha = 0,45$  имеется точка самопересечения с координатами  $k_0 = 0,1479$ ;  $k_1 = 0,7038$ ;  $k_2 = 1,5069$ ;  $\omega_1 = 0,33$ ;  $\omega_2 = 0,72$  (см. рис. 2).

3. Определение  $m_{\text{пред}}$ ,  $k_2$  находится по КНВ.

Объект  $W_y^{-1}(s) = (2s + 1)(s + 1)(0,5s + 1)^2$ , ПИД-регулятор дробного порядка,  $\delta = 0,85$ ;  $\beta = 1,1$ . Результат:  $m_{\text{пред}} = 0,7017$ ;  $k_0 = 1,5644$ ;  $k_1 = 3,7144$ ;  $\omega = 0,9895$ . Корни характеристического полинома замкнутой системы  $s_{1,2} = -0,6943 \pm j \cdot 0,9895$ ;  $s_{3,4} = -0,6943 \pm j \cdot 0,9895$ .

На рис. 3 изображены нормальная при  $m = 0$  (пунктиром) и расширенная при  $m = m_{\text{пред}}$  АФХ разомкнутой системы.

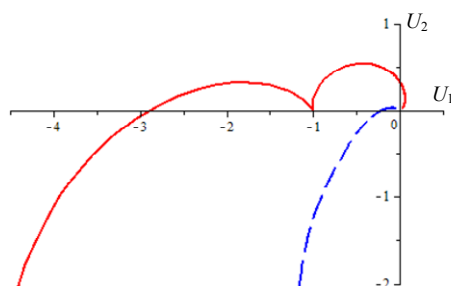


Рис. 3. Нормальная и расширенная АФХ разомкнутой системы,

$$W_y^{-1}(s) = (2s + 1)(s + 1)(0,5s + 1)^2$$

Расширенная АФХ проходит через критическую точку с точкой возврата, что соответствует предельному запасу устойчивости.

4. Определение предельного значения  $M_s$ ,  $k_2$  находится по КНВ [4].

Объект с передаточной функцией  $W_y^{-1}(s) = (s + 1)^3 e^{5s}$ ;  $\delta = 1$ ;  $\beta = 1$ . Предельное значение  $M_s = 1,4558$ ;  $k_0 = 0,1101$ ;  $k_1 = 0,3898$ ;  $\omega = 0,3275$ . При  $M_s = 1,4$  имеется точка самопересечения.



Переходные характеристики замкнутой системы по возмущению при различных  $M_s$  приведены на рис. 4.

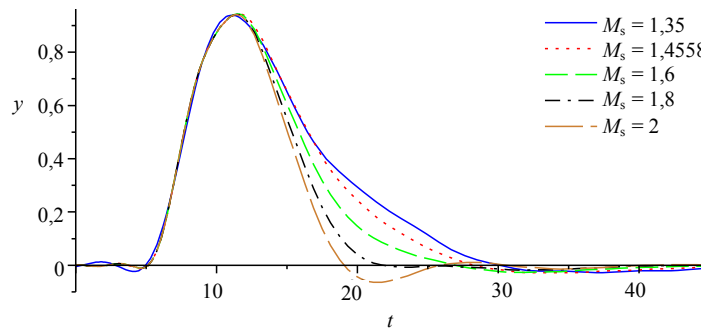


Рис. 4. Переходные характеристики замкнутых систем по возмущению при разных значениях  $M_s$ ,  $W_y^{-1}(s) = (s+1)^3 e^{5s}$

Качество регулирования при  $M_s = M_{\text{пред}}$  несколько уступает случаям с  $M_s > M_{\text{пред}}$ , но это компенсируется большим запасом устойчивости (радиус  $R = 1/M_s$  запретной окружности больше). Это позволяет системе функционировать без потери качества даже при заметных изменениях параметров объектов, т. е. повышает робастность системы.

### Заключение

В работе рассматриваются некоторые особенности задачи параметрического синтеза ПИД-регуляторов целого и дробного порядка. Показано, что от величины  $\alpha$  в формулах  $T_d = \alpha T_i$  или  $k_2 = \alpha k_1^2 / k_0$ , где значение  $\alpha$  может изменяться в широких пределах, существенно зависит характер области заданного запаса устойчивости (корневого или частотного) в плоскости  $(k_1, k_0)$ . При чрезмерном увеличении  $\alpha$  возможно самопересечение граничной кривой и сужение области заданного запаса устойчивости, в частности уменьшение максимально возможного значения коэффициента усиления системы  $k_1$ . От величины  $k_1$ , как известно, зависит интегральный критерий ИЕ [1]. В работе представлены алгоритмы расчета предельного значения  $\alpha$  и соответствующих значений  $\omega$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ , когда граничная кривая имеет точку возврата. В случае корневого запаса устойчивости предельная частота находится как корень нелинейного уравнения, а  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — решением системы линейных уравнений. Замкнутая система имеет две пары комплексно сопряженных корней вида  $s_{1,2} = -m_{\text{зад}} \omega \pm j\omega$ . Важно, что  $\alpha_{\text{пред}}$  зависит от параметров объекта и ограничивает диапазон возможных значений  $\alpha$ . В случае, когда  $k_2$  или  $T_i$  однозначно определяются по КНВ и зависят от свойств объекта, решена задача расчета предельных значений корневого и частотных запасов устойчивости  $m$ ,  $M_s$ ,  $M_p$ . Предельные значения находятся как решения четырех нелинейных уравнений. Для определения начальных значений переменных разработаны оригинальные алгоритмы построения кривых заданного запаса устойчивости в плоскости  $(k_1, k_0)$ . Для реализации предложенных алгоритмов разработаны программы в среде пакета символьных вычислений Maple. Работоспособность алгоритмов иллюстрируется примерами расчетов предельных значений параметров.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Åström K. J., Hägglund T. Advanced PID control. Research Triangle Park, NC: ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006. 460 p.
2. Ang K. H., Chong G., Li Y. PID control system analysis, design, and technology // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2005. V. 13. N. 4. P. 559–576.

3. Wallén A., Åström K. J., Hägglund T. Loop-shaping design of PID Controllers with constant Ti/Td ratio // Asian Journal of Control. 2008. V. 4. N. 4. P. 403–409.
4. Åström K. J., Hägglund T. The Future of PID Control // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. N. 4. P. 19–30.
5. Tan W., Liu J., Chen T. Comparison of some well-known PID tuning formulas // Computers & Chemical Engineering. 2006. V. 30. N. 9. P. 1416–1423.
6. Tang W., Wang Q. G., Lu X., Zhang Z. Why  $T_i=4T_d$  for PID Controller Tuning // Robotics and Vision 2006 9<sup>th</sup> International Conference on Control, Automation. Singapore: IEEE, 2006. P. 1–2.
7. O'Dwyer A. An Overview of Tuning Rules for the PI and PID Continuous-Time Control of Time-Delayed Single-Input, Single-Output (SISO) Processes // PID Control in the Third Millennium: Lessons Learned and New Approaches. London: Springer London, 2012. P. 3–44.
8. Yadaiah N., Malladi S. An optimized relation between  $T_i$  and  $T_d$  in Modified Ziegler Nichols PID controller tuning // 2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA). 2013. P. 1275–1280.
9. Leva A., Maggio M. Model-Based PI(D) Autotuning // PID Control in the Third Millennium: Lessons Learned and New Approaches. London: Springer London, 2012. P. 45–73.
10. Pecharrómán R. R., Pagola F. L. Control Design for PID Controllers Auto-Tuning Based on Improved Identification // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. N. 4. P. 85–90.
11. Смирнов Н. И., Сабанин В. П., Репин А. И. Чувствительность и робастная настройка ПИД-регуляторов с реальным дифференцированием // Теплоэнергетика. 2007. № 10. С. 15–23.
12. Ozyetkin M. M., Onat C., Tan N. PID Tuning Method for Integrating Processes Having Time Delay and Inverse Response // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. N. 4. P. 274–279.
13. Аязян Г. К., Новоженин А. Ю., Таушева Е. В. Параметрический синтез ПИД-регуляторов на заданную степень колебательности // XII Всерос. совещ. по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. P. 147–159.
14. Аязян Г. К. Расчет автоматических систем с типовыми алгоритмами регулирования. Уфа: Изд-во УНИ, 1989. 136 с.
15. Аязян Г. К., Таушева Е. В., Шаймухаметова М. П. Применение системы символьных вычислений Maple для параметрического синтеза регуляторов // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17): материалы VI Междунар. конф. Улан-Удэ – Байкал, 2017. С. 59–64.
16. Ayazyan G., Tausheva E. Parametric Synthesis of PID Controllers for Systems in Case of Low-Frequency Disturbances // 2019 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). IEEE, 2019. P. 1–6.
17. Волгин В. В. К определению оптимальных настроек ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 23. № 5. С. 620–629.
18. Сафронова И. Н., Волгин В. В. Метод кратных корней при оптимизации систем регулирования с ПИД-алгоритмом // Теплоэнергетика. 1989. № 10. С. 65–68.
19. Åström K. J., Panagopoulos H., Hägglund T. Design of PI controllers based on non-convex optimization // Automatica. 1998. V. 34. N. 5. P. 585–601.
20. Брус Дж. У., Джиблин П. Дж. Кривые и особенности: геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. 262 с.
21. Лорд И. А., Уилсон С. Б. Введение в дифференциальную геометрию и топологию. Математическое описание вида и формы. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 304 с.
22. Залгаллер В. А. Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.

Статья поступила в редакцию 18.12.2019

### **ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Аязян Гоерун Качперунович** – Россия, 450064, Уфа; Уфимский государственный нефтяной технический университет; канд. техн. наук, доцент; профессор кафедры автоматизации технологических процессов и производств; AyazyanGK@rambler.ru.

**Таушева Елена Викторовна** – Россия, 450064, Уфа; Уфимский государственный нефтяной технический университет; старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов и производств; TaushevaEV@mail.ru.



## ON SOME RESTRICTIONS IN PARAMETRIC SYNTHESIS OF PID CONTROLLERS

**G. K. Ayazyan, E. V. Tausheva**

*Ufa State Petroleum Technological University,  
Ufa, Russian Federation*

**Abstract.** The article highlights solving the problem of parametric synthesis of PID Controllers of integer and fractional orders. The methods of synthesis for the given margins and indices of the relative stability of PID Controllers of integral and fractional orders have been developed. There have been developed algorithms for calculating the limiting values of the controller differential gain, at which the boundary of the region of a given stability margin has a cusp. Applying the criterion for low-frequency disturbance compensation helps to define the limiting values of the relative stability margin and indices. To implement the proposed algorithms there have been developed the software in the environment of the Maple package of symbolic calculations. Application of the developed algorithms allows to narrow the search area for the PID Controllers optimal parameters.

**Key words:** PID-Controller, fractional order, relative stability margin, relative stability index, Maple.

**For citation:** Ayazyan G. K., Tausheva E. V. On some restrictions in parametric synthesis of PID controllers. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2020;2:7-18. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2020-2-7-18.

### REFERENCES

1. Åström K. J., Hägglund T. *Advanced PID control*. Research Triangle Park, NC, ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006. 460 p.
2. Ang K. H., Chong G., Li Y. PID control system analysis, design, and technology. *IEEE transactions on control systems technology*, 2005, vol. 13, no. 4, pp. 559-576.
3. Wallén A., Åström K. J., Hägglund T. Loop-shaping design of PID Controllers with constant Ti/Td ratio. *Asian Journal of Control*, 2008, vol. 4, no. 4, pp. 403-409.
4. Åström K. J., Hägglund T. The Future of PID Control. *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, vol. 33, no. 4, pp. 19-30.
5. Tan W., Liu J., Chen T. Comparison of some well-known PID tuning formulas. *Computers & Chemical Engineering*, 2006, vol. 30, no. 9, pp. 1416-1423.
6. Tang W., Wang Q. G., Lu X., Zhang Z. Why  $T_i=4T_d$  for PID Controller Tuning. *Robotics and Vision 2006 9th International Conference on Control, Automation*. Singapore, IEEE, 2006. Pp. 1-2.
7. O'Dwyer A. An Overview of Tuning Rules for the PI and PID Continuous-Time Control of Time-Delayed Single-Input, Single-Output (SISO) Processes. *PID Control in the Third Millennium: Lessons Learned and New Approaches*. London, Springer London, 2012. Pp. 3-44.
8. Yadaiah N., Malladi S. An optimized relation between  $T_i$  and  $T_d$  in Modified Ziegler Nichols PID controller tuning. *2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*. 2013. Pp. 1275-1280.
9. Leva A., Maggio M. Model-Based PI(D) Autotuning. *PID Control in the Third Millennium: Lessons Learned and New Approaches*. London, Springer London, 2012. Pp. 45-73.
10. Pecharromán R. R., Pagola F. L. Control Design for PID Controllers Auto-Tuning Based on Improved Identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, vol. 33, no. 4, pp. 85-90.
11. Smirnov N. I., Sabanin V. R., Repin A. I. Chuvstvitel'nost' i robastnaia nastroyka PID-regulyatorov s real'nym differentsirovaniem [Sensitivity and robust tuning of PID controllers with real differentiation]. *Teploenergetika*, 2007, no. 10, pp. 15-23.
12. Ozyetkin M. M., Onat C., Tan N. PID Tuning Method for Integrating Processes Having Time Delay and Inverse Response. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 4, pp. 274-279.
13. Aiazian G. K., Novozhenin A. Iu., Tausheva E. V. Parametricheskii sintez PID-regulyatorov na zadanuii stepen' kolebatel'nosti [Parametric synthesis of PID controllers for given margin of relative stability]. *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniia (VSPU-2014)*. Moscow, In-t problem upravleniia im. V. A. Trapeznikova RAN, 2014. Pp. 147-159.
14. Aiazian G. K. *Raschet avtomaticheskikh sistem s tipovymi algoritmami regulirovaniia* [Analysis of automatic systems with typical control algorithms]. Ufa, Izd-vo UNI, 1989. 136 p.
15. Aiazian G. K., Tausheva E. V., Shaimukhametova M. R. Primenenie sistemy simvol'nykh vychislenii Maple dlia parametricheskogo sinteza regulyatorov [Application of Maple symbolic computing system for parametric synthesis of controllers]. *Matematika, ee prilozheniia i matematicheskoe obrazovanie (MPMO17): materialy VI Mezhdunarodnoi konferentsii*. Ulan-Ude - Baikal, 2017. Pp. 59-64.

16. Ayazyan G., Tausheva E. Parametric Synthesis of PID Controllers for Systems in Case of Low-Frequency Disturbances. *2019 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. IEEE, 2019. Pp. 1-6.
17. Volgin V. V. K opredeleniiu optimal'nykh nastroek PID-regulatorov [To determining optimal settings for PID controllers]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1960, vol. 23, no. 5, pp. 620-629.
18. Safronova I. N., Volgin V. V. Metod kratnykh kornei pri optimizatsii sistem regulirovaniia s PID-algoritmom [Multiple root method for optimization of control systems with PID algorithm]. *Teploenergetika*, 1989, no. 10, pp. 65-68.
19. Åström K. J., Panagopoulos H., Hägglund T. Design of PI controllers based on non-convex optimization. *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 585-601.
20. Brus Dzh. U., Dzhibliin P. Dzh. *Krivye i osobennosti: geometricheskoe vvedenie v teoriyu osobennostei* [Curves and singularities: geometric introduction to singularity theory]. Moscow, Mir Publ., 1988. 262 p.
21. Lord I. A., Uilson S. B. *Vvedenie v differentsial'nuiu geometriiu i topologiiu. Matematicheskoe opisanie vida i formy* [Introduction to differential geometry and topology. Mathematical description of form and shape]. Moscow – Izhevsk, In-t komp'iuter. issled., 2003. 304 p.
22. Zalgaller V. A. *Teoriia ogibaiushchikh* [Envelope theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 104 p.

The article submitted to the editors 18.12.2019

### **INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Ayazyan Goerun Kachperunovich** – Russia, 450064, Ufa; Ufa State Petroleum Technological University; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Professor of the Department of Automation of Technological Processes and Production; AyazyanGK@rambler.ru.

**Tausheva Elena Viktorovna** – Russia, 450064, Ufa; Ufa State Petroleum Technological University; Senior Lecturer of the Department of Automation of Technological Processes and Production; TaushevaEV@mail.ru.

