DOI: 10.24143/2072-9502-2019-3-123-132
УДК 519.7

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Е. Р. Галяув, Е. В. Франгулова

Астраханский государственный технический университет,
Астрахань, Российская Федерация

Решена задача субоптимального управления параметрически и функционально неопределенным линейным нестационарным объектом. Предполагается, что измерению доступны только скалярные вход и выход объекта. Цель управления состоит в субминимизации интеграла с бесконечным верхним пределом от квадратичной подынтегральной функции, зависящей от скалярного выхода объекта и сигнала управления. Полученный алгоритм прост и не требует сложных аналитических расчетов параметров системы управления. Работоспособность полученных алгоритмов проиллюстрирована на численных примерах.

Ключевые слова: робастное управление, субоптимальное управление, внешнее возмущающее воздействие, неопределенный нестационарный линейный объект, интегральный критерий качества, наблюдатель, функция Ляпунова.

Для цитирования: *Галяув Е. Р., Франгулова Е. В.* Субоптимальное управление линейным нестационарным объектом с запаздыванием по состоянию // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 3. С. 123–132. DOI: 10.24143/2072-9502-2019-3-123-132.

Введение

Синтез систем высокой точности в условиях неопределенности является классической проблемой в теории управления. Актуальной является проблема разработки алгоритмов управления, обеспечивающих не только устойчивость системы в этих условиях, но и оптимальное ее функционирование по некоторым критериям качества. Решению этих задач посвящено множество работ. На данный момент достаточно полно и систематизированно робастная теория изложена в [1]. Так, в условиях полной определенности в теории оптимального управления предложен *LQR*-подход. Однако при наличии произвольных внешних возмущений, невозможности точно определить параметры модели объекта, изменении динамических свойств системы в процессе функционирования оптимальные системы, синтезированные по квадратичному критерию качества, часто теряют работоспособность. Большими возможностями в этих условиях обладает робастный подход к построению систем управления. К настоящему времени получено достаточно много алгоритмов построения субоптимальных систем для линейных и нелинейных объектов, подверженных параметрическим и внешним возмущениям: H_∞-оптимизация, L_1-оптимизация, μ-синтез, *LMI*-подход и др. Следует отметить, что большинство имеющихся методов синтеза предназначены для стационарных систем. Однако практика в изобилии доставляет объекты управления, которые описываются параметрически неопределенными нестационарными с запаздыванием по состоянию дифференциальными уравнениями.

Особое внимание на сегодняшний день уделяется робастному и робастно-субоптимальному управлению системами, когда полный вектор состояния недоступен измерению, а измеряется только вектор выходных переменных [2–7]. Компенсация внешних возмущений путем объединения квазиинвариантной стратегии с классической предложена в [2]. Одним из распространенных подходов к задаче компенсации внешних детерминированных возмущений является метод внутренней модели [3, 4]. Робастные системы с компенсацией возмущений, построенные на основе их оценок, рассмотрены в [6, 7].

Однако задача разработки простых в реализации алгоритмов робастного и робастного субоптимального управления для широкого класса динамических объектов по выходу, обеспечивающих их функционирование в соответствии с заданными требованиями по качеству при наличии влияния возмущений, остается актуальной в теории и практике автоматических систем.

В предложенной работе решается задача построения робастного субоптимального регулятора для параметрически неопределенного линейного нестационарного объекта, подверженного воздействию внешних ограниченных возмущений. Цель управления – минимизация интегрального критерия качества с малой погрешностью отклонения от номинального значения. Синтез системы управления основан на результатах [8]. Компенсация неопределенностей базируется на подходе, предложенном в [6]. Результаты репрезентативного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенной системы управления.

Постановка задачи

Рассматривается линейный нестационарный объект управления, динамические процессы в котором описываются в пространстве состояний уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + C(t)x(t-\tau(t)) + B(t)u(t) + D(t)f(t),\; y(t) = Lx(t),\, x(0) = x_0, \tag{1}$$

где функции $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}$ – управляемый выход объекта, $u(t) \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие, $f(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченное внешнее возмущающее воздействие, $\tau(t) \in \mathbb{R}^+$ – ограниченное неизвестное время запаздывания; $\dfrac{d\tau(t)}{dt} < 1$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $D(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ – неизвестные функциональные матрицы, $C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1(t) & \ldots & c_n(t) \end{bmatrix}$; $L = [1;\ 0;\ \ldots;\ 0]$, x_0 – начальные условия.

Предположения

1. Коэффициенты матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, и $D(t)$ зависят от некоторого вектора неизвестных параметров $\zeta \in \Xi$, где Ξ – известное ограниченное множество.

2. Пара $(A(t), B(t))$ – управляема, а пара $(A(t), L)$ – наблюдаема.

3. Измерению доступны выходной сигнал $y(t)$ и управляющее воздействие $u(t)$. Использование производных этих величин в системе управления не допускается.

4. Выполнены условия структурного согласования $A(t) = A_{\text{Н}} + B_{\text{Н}}\psi^T(t)$, $B(t) = B_{\text{Н}} + B_{\text{Н}}\vartheta(t)$, $C(t) = B_{\text{Н}}\sigma^T(t)$ и $D(t) = B_{\text{Н}}k(t)$, где $A_{\text{Н}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{\text{Н}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ – известные номинальные матрицы; $A_{\text{Н}}$ – гурвицева матрица в форме Фробениуса; $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n$ – ограниченные неизвестные векторы; $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^+$, $k(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченные неизвестные функции.

5. Для любого фиксированного параметра t объект управления (1) минимально-фазовый.

Требуется получить алгоритм функционирования системы управления, который обеспечит минимум функционалу

$$J = \int_0^\infty \left[\left(y^2(t)q + u_0^2(t)r\right)\right]dt, \tag{2}$$

где $q \geq 0$, $r > 0$ – весовые коэффициенты, выбираемые разработчиком.

Метод решения

Чтобы получить субоптимальную систему управления для нестационарного объекта (1), управление $u(t)$ формируется в виде суммы двух составляющих [8]:

$$u(t) = u_0(t) + u_k(t).$$

Сигнал $u_k(t)$ необходим для компенсации неопределенностей в объекте (1). Слагаемое $u_0(t)$ определяет оптимальный закон управления, обеспечивающий минимум функционалу качества (2).

В силу условия 4 Предположений перепишем систему (1):

$$\dot{x}(t)=A_{\text{н}}x(t)+B_{\text{н}}u(t)+B_{\text{н}}\varphi(x,u,t);\; y(t)=Lx(t), \tag{3}$$

где функция $\varphi(x,\ u,\ t)=\psi^T(t)x(t)+\sigma^T(t)x(t-\tau(t))+\vartheta(t)u(t)+k(t)f(t)$ содержит все неопределенности объекта (1) и слагаемое с запаздыванием; $L=[1;\ 0;\ \ldots;\ 0]$.

Рассмотрим систему (3) в предположении, что в ней отсутствуют неопределенности, т. е. при $\varphi(x,\ u,\ t)=0$. Для полученного номинального объекта

$$\dot{x}_{\text{н}}(t)=A_{\text{н}}x_{\text{н}}(t)+B_{\text{н}}u_0(t);\; y_{\text{н}}(t)=Lx_{\text{н}}(t) \tag{4}$$

рассмотрим критерий качества

$$J=\int_0^\infty\left[x^T(t)Mx(t)+u_0^2(t)r\right]dt \tag{5}$$

с матрицей $M=qL^TL$, преобразованный из (2) подстановкой второго уравнения (1).

Согласно [8] оптимальный закон управления $u_0(t)$ в форме обратной связи по состоянию, гарантирующий минимум функционалу (5), определяется следующим образом:

$$u_0(t)=-K_0x(t), \tag{6}$$

где матрица $K_0=r^{-1}B_{\text{н}}^TH$, где $H=H^T>0$ является решением матричного уравнения Лурье – Риккати $A_{\text{н}}^TH+HA_{\text{н}}-r^{-1}HB_{\text{н}}B_{\text{н}}^TH=-M$; весовой коэффициент $r>0$.

Однако в силу того, что вектор состояния $x(t)$ недоступен измерению, построим наблюдатели

$$\dot{\bar{x}}(t)=A_{\text{н}}\bar{x}(t)+B_{\text{н}}u(t)+S\left(y(t)-\bar{y}(t)\right)+B_{\text{н}}v(t)\,;\; \bar{y}(t)=L\bar{x}(t). \tag{7}$$

Здесь $\bar{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ – оценка вектора состояния $x(t)$; $v(t)$ – сигнал управления, компенсирующий влияние возмущений на процесс наблюдения; S – матрица коэффициентов усиления, такая, что $A_1=A_{\text{н}}-SL$ – гурвицева; $L=[1;\ 0;\ \ldots;\ 0]$.

Тогда оптимальный сигнал сформируем в виде

$$u_0(t)=-K_0\bar{x}(t). \tag{8}$$

Но для качественной оценки вектора $x(t)$ требуется скомпенсировать влияние параметрических и внешних возмущений на эти оценки. Поэтому необходимо выполнить следующие преобразования.

Перепишем систему (3), добавляя и вычитая в правой ее части оптимальное управление (8):

$$\dot{x}(t)=A_{\text{н}}x(t)+B_{\text{н}}u_k(t)+B_{\text{н}}\varphi(x,\ u,\ t)-B_{\text{н}}K_0\bar{x}(t);\; y(t)=Lx(t). \tag{9}$$

Прибавим и вычтем теперь значения (6) в (9), в результате получаем

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+B_{\text{н}}u_k(t)+B_{\text{н}}\varphi(x,\ u,\ t)+B_{\text{н}}K_0\varsigma(t);\; y(t)=Lx(t). \tag{10}$$

Матрица $A_0=A_{\text{н}}-B_{\text{н}}K_0$, $\varsigma(t)=x(t)-\bar{x}(t)$ – вектор ошибки, полученный вычитанием уравнения (7) из (3):

$$\dot{\varsigma}(t)=A_1\varsigma(t)+B_{\text{н}}\varphi(x,\ u,\ t)-B_{\text{н}}v(t);\; e(t)=L\varsigma(t). \tag{11}$$

Выберем вспомогательный контур [6]

$$\dot{\varsigma}_v(t)=A_1\varsigma_v(t)-B_{\text{н}}v(t);\;\; \varsigma_v(0)=\varsigma(0);\;\; e_v(t)=L\varsigma_v(t), \tag{12}$$

где $\varsigma_v(t)\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния, который позволяет выделить в отдельный сигнал все нежелательные воздействия. Принимая во внимание уравнения (11) и (12), составим уравнение рассогласования $\xi(t)=\varsigma(t)-\varsigma_v(t)$, которое в переменных «вход-выход» запишется как

$$Q_0(p)\varepsilon(t)=R_0(p)\varphi(x,\ u,\ t).$$

Здесь $\varepsilon(t)=e(t)-e_v(t)$; $Q_0(p)$ и $R_0(p)$ – линейные дифференциальные операторы, коэффициентами которых являются коэффициенты полиномов $Q_0(\lambda)=\det(\lambda I-A_0)$ и $R_0(\lambda)$; $\deg Q_0(\lambda)=n$; $\deg R_0(\lambda)=m$; $\gamma=n-m\geq 1$, $p=\dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования. Тогда управляющие воздействия $u_k(t)$ и $v(t)$ будем формировать следующим образом:

$$v(t)=\frac{Q_0(p)}{R_0(p)}\varepsilon(t)=\hat{\varphi}(x,\ u,\ t);$$

$$u_k(t)=-v(t).$$

Однако в силу Предположения 3 производные сигнала $\varepsilon(t)$ недоступны измерению. Поэтому выполним «операторное деление»

$$\frac{Q_0(p)}{R_0(p)}=T_0(p)+\frac{\Delta Q_0(p)}{R_0(p)},$$

где $T_0(p)=g_0p^{\gamma}+g_1p^{\gamma-1}+g_2p^{\gamma-2}+\ldots+g_{\gamma}$; $\deg\Delta Q_0(p)=m-1$. И, чтобы скомпенсировать все неопределенности системы (1), сигнал управления $v(t)$ зададим в виде

$$\begin{gathered}v(t)=g^T\hat{\xi}(t)+\frac{\Delta Q_0(p)}{R_0(p)}\varepsilon(t)=\hat{\varphi}(x,\ u,\ t);\\ u_k(t)=-v(t),\end{gathered}\tag{13}$$

где g – вектор, компонентами которого являются коэффициенты оператора $T_0(p)$, записанные в обратном порядке; $\hat{\varphi}(x,\ u,\ t)$ – оценка сигнала $\varphi(x,\ u,\ t)$, содержащего параметрические и внешние неопределенности исходного объекта; $\hat{\xi}(t)$ – оценка вектора $\theta^T(t)=\left[\varepsilon(t),\varepsilon'(t),\varepsilon''(t),\ \ldots,\ \varepsilon^{(\gamma)}(t)\right]$, полученная с помощью наблюдателя [9]

$$\dot{\hat{\xi}}(t)=G_0\hat{\xi}(t)+F_0\left(\hat{\varepsilon}(t)-\varepsilon(t)\right);\ \ \hat{\varepsilon}(t)=L\hat{\xi}(t).\tag{14}$$

Здесь $\hat{\xi}(t)\in\mathbb{R}^{\gamma}$; $G_0=\begin{bmatrix}0 & I_{\gamma}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; $F_0^T=\left[-f_0\mu^{-1},-f_1\mu^{-2},\ \ldots,\ -f_{\gamma}\mu^{-\gamma-1}\right]$; числа $f_0,f_1,\ \ldots,f_{\gamma}$ выбираются так, чтобы матрица $G=G_0-FL$ была гурвицевой; $F^T=\left[f_0,f_1,\ \ldots,f_{\gamma}\right]$; μ – малое положительное число; $\hat{\varepsilon}(t)$ – оценка переменной $\varepsilon(t)$.

Для оценки точности наблюдения введем вектор отклонений

$$\eta(t)=\Gamma^{-1}\left(\hat{\xi}(t)-\theta(t)\right)$$

с матрицей $\Gamma^{-1}=\operatorname{diag}\left\{\mu^{\gamma-1},\ \ldots,\ \mu,\ 1\right\}$. Продифференцировав $\eta(t)$ по времени с учетом (14), составим уравнение для нормированных отклонений:

$$\dot{\eta}(t)=\frac{1}{\mu}G\eta(t)+\bar{b}\varepsilon^{(\gamma)}(t);\ \Delta(t)=\hat{\varepsilon}(t)-\varepsilon(t)=\mu^{\gamma-1}L\eta(t),$$

где $b^T = [0, 0, \ldots, 1]$. Преобразуем последнее уравнение в эквивалентное относительно выхода $\Delta(t)$:

$$\dot{\bar{\eta}}(t)=\frac{1}{\mu}G\bar{\eta}(t)+\bar{b}\varepsilon'(t);\ \Delta(t)=\mu^{\gamma-1}\bar{\eta}_1(t)=\mu^{\gamma-1}L\bar{\eta}(t), \tag{15}$$

где $\bar{\eta}(t)\in\mathbb{R}^{\gamma}$; $\bar{b}^T=[1,\ 0,\ \ldots,\ 0]$. Последние два уравнения эквивалентны относительно переменных $\eta_1(t)$ и $\bar{\eta}_1(t)$, т. к. они являются различными формами записи одного уравнения $\left(p^{\gamma}+\frac{d_1}{\mu}p^{\gamma-1}+\ldots+\frac{d_{\gamma}}{\mu^{\gamma}}\right)\eta_1(t)=\varepsilon^{(\gamma)}(t)$.

Тогда, принимая во внимание уравнения закона управления (8), наблюдателя (14), уравнение для нормированных отклонений (15) и сигнал управления (13), уравнения (10) и (11) преобразуем к виду

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=A_0x(t)+b\mu^{\gamma-1}g^T\bar{\Delta}(t)+B_{\text{н}}K_0\varsigma(t);\ y(t)=Lx(t);\\ \dot{\varsigma}(t)=A_1\varsigma(t)-b\mu^{\gamma-1}g^T\bar{\Delta}(t);\ e(t)=L\varsigma(t),\end{gathered} \tag{16}$$

где $\bar{\Delta}(t)=\left[\bar{\eta}_1(t),\bar{\eta}_1'(t),\ \ldots,\ \bar{\eta}_1^{(\gamma)}(t)\right]^T$.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений для объекта управления (1). Тогда существует число $\mu_0>0$, такое, что при $\mu\le\mu_0$ система управления (8), (12), (13)–(16) диссипативна и минимизирует функционал качества (2) с достаточно малой погрешностью отклонения от значения для номинального объекта.

Доказательство утверждения. Для доказательства утверждения введем новую переменную $\omega(t)\in\mathbb{R}^n$, равную разности фазовых векторов (16) и (4), и рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\dot{\omega}(t)=A_0\omega(t)+b\mu_2^{\gamma-1}g^T\bar{\Delta}(t);\ \omega(0)=0;\\ \mu_1\dot{\bar{\eta}}(t)=G\bar{\eta}(t)+\mu_2\bar{b}\varepsilon'(t),\end{gathered} \tag{17}$$

где $\mu_1=\mu_2=\mu$.

Воспользуемся леммой [10].

***Лемма* [10].** Если система описывается уравнением $\dot{x}=f(x,\ \mu_1,\ \mu_2)$, $x\in\mathbb{R}^m$, где $f(x,\ \mu_1,\ \mu_2)$ – непрерывная функция, липшицева по x, и при $\mu_2=0$ имеет ограниченную замкнутую область диссипативности $\Omega_1=\{x\mid F(x)<C\}$, где $F(x)$ – положительно определенная, непрерывная, кусочно-гладкая функция, то существует $\mu_0>0$, такое, что при $\mu_1\le\mu_0$ и $\mu_2\le\mu_0$ исходная система имеет ту же область диссипативности Ω_1, если для некоторых чисел C_1 и $\bar{\mu}_1$ при $\mu_2=0$ выполнено условие

$$\sup_{|\mu_1|\le\bar{\mu}_1}\left(\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right)^T f(x,\ \mu_1,\ 0)\right)\le -C_1 \text{ при } F(x)=C.$$

При $\mu_2=0$ последняя система асимптотически устойчива по переменным $\omega(t)$ и $\bar{\eta}(t)$, т. к. матрицы A_0 и G – гурвицевы. Следовательно, переменные $\omega(t)$, $\bar{\eta}(t)$ ограничены. Тогда из уравнений (17) и условий леммы [10] для некоторого $\mu_0>0$ сигналы $\varepsilon'(t)$ и $\bar{\Delta}(t)$ – ограниченные функции, т. е. $\chi\ge\sup\limits_t\left|\varepsilon'(t)\right|$, $\phi\ge\sup\limits_t\left|\bar{\Delta}(t)\right|$, где χ и ϕ – некоторые положительные числа.

Из вышесказанного и уравнений (4) и (14) следует ограниченность векторов $x(t)$ и $\hat{\xi}(t)$. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x,\ u,\ t) = \psi^T(t)x(t) + \sigma^T(t)x(t-\tau(t)) + \vartheta(t)u(t) + k(t)f(t) =$$
$$= \psi^T(t)x(t) + \sigma^T(t)x(t-\tau(t)) + \vartheta(t)(u_0(t) + u_k(t)) + k(t)f(t) =$$
$$= \psi^T(t)x(t) + \sigma^T(t)x(t-\tau(t)) + \vartheta(t)(u_k(t) - K_0\bar{x}(t)) + k(t)f(t).$$

Принимая во внимание (13), разрешим его относительно $u_k(t)$:

$$u_k(t) = -\frac{1}{\vartheta(t)+1}\left(\psi^T(t)x(t) + \sigma^T(t)x(t-\tau(t)) - \vartheta(t)K_0\bar{x}(t) + k(t)f(t)\right).$$

Ввиду ограниченности всех сигналов в правой части последнего равенства, что следует из доказанного выше и условия 4 Предположений, управление $u_k(t)$ также ограничено. Таким образом, все сигналы в замкнутой системе (8), (12), (13)–(16) ограничены. Однако из этого не следует асимптотическая устойчивость этой системы при $\mu_2 \neq 0$.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(t) = \omega^T(t)N\omega(t) + \bar{\eta}^T(t)P\bar{\eta}(t), \tag{18}$$

положительно определенные симметрические матрицы N и P определяются из уравнений

$$NA_0 + A_0^T N = -2I_n;\ PG + G^T P = -2I_n.$$

Производная от функции $V(t)$ вдоль траектории (17) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ примет вид

$$\dot{V}(t) = -2|\omega(t)|^2 - \frac{2}{\mu_0}|\bar{\eta}(t)|^2 + 2\omega^T(t)Nb\mu_0^{\gamma-1}g^T\bar{\Delta}(t) + 2\bar{\eta}^T(t)P\bar{b}\varepsilon'(t). \tag{19}$$

Воспользуемся оценками

$$2\omega^T(t)Nb\mu_0^{\gamma-1}g^T\bar{\Delta}(t) \le \mu_0^{\gamma}|Nb|^2|\omega(t)|^2 + \mu_0^{\gamma-1}\left|\bar{\Delta}(t)\right|^2 \le \mu_0^{\gamma}|Nb|^2|\omega(t)|^2 + \mu_0^{\gamma-1}\phi^2;$$
$$2\bar{\eta}^T(t)P\bar{b}\varepsilon'(t) \le \frac{1}{\mu_0^2}|\bar{\eta}(t)|^2\left|P\bar{b}\right|^2 + \mu_0^2|\varepsilon'(t)|^2 \le \frac{1}{\mu_0^2}|\bar{\eta}(t)|^2\left|P\bar{b}\right|^2 + \mu_0^2\chi^2.$$

Подставив полученные оценки в (19), получаем

$$\dot{V}(t) = -|\omega(t)|^2 - \frac{1}{\mu_0}|\bar{\eta}(t)|^2 - |\omega(t)|^2\left(1 - \mu_0^{\gamma-1}|Nb|^2\right) - \frac{1}{\mu_0}|\bar{\eta}(t)|^2\left(1 - \frac{1}{\mu_0}\left|P\bar{b}\right|^2\right) + \mu_0^2\left(\mu_0^{\gamma-3}\phi^2 + \chi^2\right).$$

Очевидно, всегда найдется такое μ_0, обеспечивающее положительность чисел в скобках последнего равенства. Тогда, в силу структуры функции Ляпунова (18), ее производную (19) можно оценить как

$$\dot{V}(t) \le \alpha V(t) + \mu_0^2\left(\mu_0^{\gamma-3}\varphi^2 + \chi^2\right),$$

где $\alpha = \min\left(\frac{1}{\lambda_{\min}(N)};\ \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}\right)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ – минимальное собственное число соответствующей матрицы.

Решением последнего неравенства является

$$V(t) \le e^{-\alpha t}V(0) + \left(1 - e^{-\alpha t}\right)\frac{\mu_0^2}{\alpha}\left(\mu_0^{\gamma-3}\phi^2 + \chi^2\right),$$

из чего следует, что

$$\lim_{t\to\infty} V(t) \le \frac{\mu_0^2}{\alpha}\left(\mu_0^{\gamma-3}\phi^2 + \chi^2\right).$$

Значит,

$$\omega(t) \le \sqrt{V(t)} \le \mu_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(\mu_0^{\gamma-3}\phi^2 + \chi^2\right)} \text{ при } t\to\infty .$$

Пример. Рассмотрим объект управления вида (1), в котором $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \end{bmatrix}$,

$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$, $D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d(t) \end{bmatrix}$, $L = [1;\ 0;\ \ldots;\ 0]$, $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

Класс неопределенности Ξ задан множеством $\Xi = \{a_i,\ c_i,\ b,\ d : a_i \in [-30;\ 30];\ c_i \in [-30;\ 30];$ $b \in [1;\ 8];\ d \in [-10;\ 10];\ i = 1,\ 2,\ 3\}$.

Измерению доступен выходной сигнал $y(t)$. Функция возмущений, действующая на объект управления, ограничена: $|f(t)| \le 10$.

Решим для номинальной системы (4)

$$\dot{x}_{\text{Н}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x_{\text{Н}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_0(t);\ \ y_{\text{Н}}(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\, x_{\text{Н}}(t)$$

задачу оптимального управления с критерием качества (2) при $q = 3$, $r = 2$.

Оптимальный закон управления (8) сформируем следующим образом:

$$u_0(t) = -[0{,}5811 \quad 0{,}7144 \quad 0{,}3300]\,\bar{x}(t),$$

где $\bar{x}(t)$ – оценка вектора $x(t)$, сформированная наблюдателем (7) с матрицей $S = [10 \quad 50 \quad 29]^T$.

Решением уравнения Лурье – Риккати $A_{\text{Н}}^T H + HA_{\text{Н}} - r^{-1} HB_{\text{Н}} B_{\text{Н}}^T H = -M$ является матрица

$$H = \begin{bmatrix} 4{,}5837 & 3{,}3681 & 1{,}1623 \\ 3{,}3681 & 3{,}4868 & 1{,}4288 \\ 1{,}1623 & 1{,}4288 & 0{,}6600 \end{bmatrix}.$$

Зададим вспомогательный контур (12)

$$\dot{\varsigma}_v(t) = A_1 \varsigma_v(t) - B_{\text{Н}} v(t);\ \ \varsigma_v(0) = \varsigma(0);\ \ e_v(t) = L\varsigma_v(t)$$

с матрицей $A_1 = A_{\text{Н}} - SL = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \\ 28 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Тогда уравнение относительно переменной $\xi(t) = \varsigma(t) - \varsigma_v(t)$ примет вид

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -50 & 0 & 1 \\ -30 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi(x,\ u,\ t);\ \ \varepsilon(t) = e(t) - e_v(t);\ \ \xi(0) = [0\ 0\ 0]^T.$$

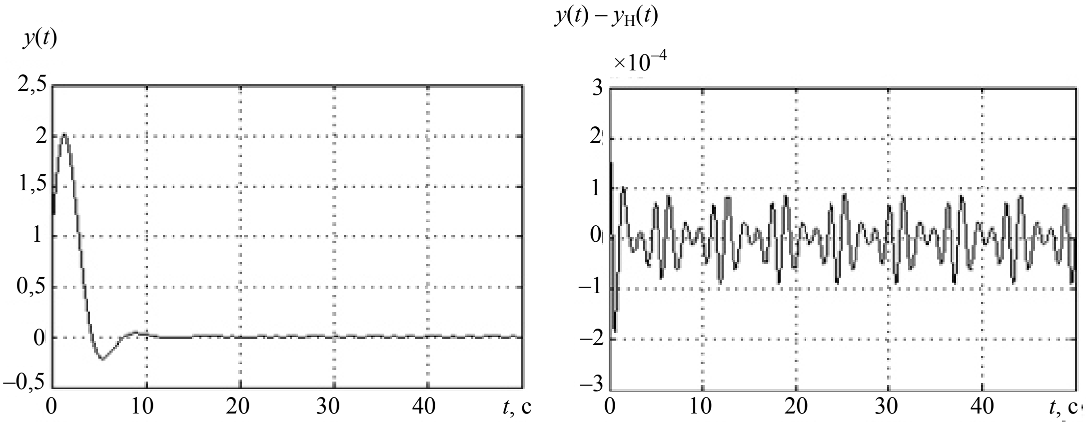
Для оценки производных сигнала $\varepsilon(t)$ воспользуемся наблюдателем (14):

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1(t) = \hat{\xi}_2(t) + \dfrac{15}{0,01}\left(\varepsilon(t) - \hat{\varepsilon}(t)\right), \\ \dot{\hat{\xi}}_2(t) = \hat{\xi}_3(t) + \dfrac{75}{0,01^2}\left(\varepsilon(t) - \hat{\varepsilon}(t)\right);\ \hat{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\xi}}_3(t) = \dfrac{125}{0,01^3}\left(\varepsilon(t) - \hat{\varepsilon}(t)\right). \end{cases}$$

Таким образом, закон управления (13) формируется следующим образом:

$$v(t) = \hat{\xi}_3(t) + 12\hat{\xi}_2(t) + 72\hat{\xi}_1(t) + 150\varepsilon(t);$$
$$u_k(t) = -v(t).$$

На рис. приведены графики переходных процессов по $y(t)$ и ошибке слежения $y(t) - y_{\text{Н}}(t)$ при следующих значениях параметров в рассматриваемой системе: $a_1(t) = 1 + \sin 0,2t$, $a_2(t) = 3 + \sin 0,5t$, $a_3(t) = 2 + \sin 0,7t$, $c_1(t) = 1 + 2\sin 0,6t$, $c_2(t) = -2 + \sin 0,2t$, $c_3(t) = 3 + 2\sin 0,2t$, $b(t) = 2 + \sin t$, $d(t) = 2\sin 2t - 1$, $f(t) = 1 + \sin t + \sin(2t + \pi/6)$, $\tau(t) = e^{-t}$.



Переходные процессы по $y(t)$ и ошибке слежения $y(t) - y_{\text{Н}}(t)$

Значение интегрального критерия качества (2) для объекта управления (1) равно $J_p(t) = 25,500$, для номинального объекта (4) критерий принимает значение $J_{\text{Н}}(t) = 25,501$. Нетрудно видеть, что абсолютная погрешность отклонения этих значений очень мала и составляет 0,0001.

Заключение

Предложен принцип построения робастного субоптимального регулятора для параметрически и функционально неопределенного линейного нестационарного объекта по выходу. Цель управления состоит в синтезе системы регулирования, минимизирующей интегральный критерий качества (2) с некоторой погрешностью отклонения от номинального значения. Формирование управляющего воздействия базируется на идее, предложенной в [8], где управляющий сигнал предложено разложить на оптимальное управление, минимизирующее заданный функционал качества (2), и компенсирующее неопределенности объекта управления. Компенсация параметрических и функциональных неопределенностей основана на подходе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
2. *Неймарк Ю. И.* Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 48–56.
3. *Никифоров В. О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений 1. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 13–24.
4. *Никифоров В. О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений 2. Объекты с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 40–48.
5. *Бобцов А. А.* Алгоритмы робастного управления линейным объектом по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 93–97.
6. *Цыкунов А. М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103–115.
7. *Цыкунов А. М.* Робастное управление с компенсацией ограниченных возмущений и помех // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 19–26.
8. *Буков В. Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
9. *Atassi A. N., Khalil H. K.* Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. N. 9. P. 1672–1687.
10. *Брусин В. А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем. I // Автоматика и телемеханика. 1995. № 4. С. 119–127.

Статья поступила в редакцию 15.05.2019

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Галяув Елена Романовна – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский государственный технический университет; канд. техн. наук; доцент кафедры высшей и прикладной математики; galyauv@ya.ru.

Франгулова Елена Владимировна – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский государственный технический университет; старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики; elena.frangulova@mail.ru.

SUBOPTIMAL CONTROL OVER LINEAR NON-STATIONARY PLANT WITH DELAY

E. R. Galiauv, E. V. Frangulova

Astrakhan State Technical University,
Astrakhan, Russian Federation

Abstract. The article focuses on the fact that the problem of suboptimal control over parametrically and functionally undefined linear non-stationary plant has been solved. It is supposed that only scalar input and output of plant are determinable. The purpose of control consists in subminimization of the integral with an infinite top limit from square-law sub-integral function dependent on a scalar input of the plant and a control signal. The algorithm received is simple and does not require difficult analytical accounts of parameters of a control system. The serviceability of the received algorithms is illustrated on numerical examples.

Key words: robust control, suboptimal control, external disturbance, unspecified non-stationary linear plant, integrated criterion of quality, observer, Lyapunov function.

For citation: Galiauv E. R., Frangulova E. V. Suboptimal control over linear non-stationary plant with delay. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2019;3:123-132. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2019-3-123-132.

REFERENCES

1. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robastnaya ustojchivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 303 p.

2. Nejmark Yu. I. Sintez i funkcional'nye vozmozhnosti kvaziinvariantnogo upravleniya [Synthesis and functionality of quasi-invariant control]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2008, no. 10, pp. 48-56.

3. Nikiforov V. O. Nablyudateli vneshnih determinirovannyh vozmushchenij 1. Ob"ekty s izvestnymi parametrami [Observers of external deterministic disturbances 1. Objects with known parameters]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2004, no. 10, pp. 13-24.

4. Nikiforov V. O. Nablyudateli vneshnih determinirovannyh vozmushchenij 2. Ob"ekty s neizvestnymi parametrami [Observers of external deterministic disturbances 2. Objects with known parameters]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2004, no. 11, pp. 40-48.

5. Bobcov A. A. Algoritmy robastnogo upravleniya linejnym ob"ektom po vyhodu s kompensaciej neizvestnogo determinirovannogo vozmushcheniya [Robust control algorithms for output linear plant with compensation of unknown deterministic disturbance]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2003, no. 2, pp. 93-97.

6. Cykunov A. M. Algoritmy robastnogo upravleniya s kompensaciej ogranichennyh vozmushchenij [Robust control algorithms with limited disturbance compensation]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2007, no. 7, pp. 103-115.

7. Cykunov A. M. Robastnoe upravlenie s kompensaciej ogranichennyh vozmushchenij i pomekh [Robust control with limited disturbance and interference compensation]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2014, no. 3, pp. 19-26.

8. Bukov V. N. Vlozhenie sistem. *Analiticheskij podhod k analizu i sintezu matrichnyh sistem* [Nesting systems. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems]. Kaluga, Izd-vo nauch. lit. N. F. Bochkarevoj, 2006. 720 p.

9. Atassi A. N., Khalil H. K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*., 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672-1687.

10. Brusin V. A. Ob odnom klasse singulyarno-vozmushchennyh adaptivnyh sistem. I [On a class of singularly perturbed adaptive systems. I]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1995, no. 4, pp. 119-127.

The article submitted to the editors 15.05.2019

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Galiauv Elena Romanovna – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State Technical University; Candidate of Technical Sciences; Assistant Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics; galyauv@ya.ru.

Frangulova Elena Vladimirovna – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State Technical University; Senior Lecturer of the Department of Higher and Applied Mathematics; elena.frangulova@mail.ru.