

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОРТОВЫХ КРАНОВ НА ОСНОВЕ ОДНО- И ДВУМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. В. Синельщиков¹, Н. Н. Панасенко²

¹ *Астраханский государственный архитектурно-строительный университет,
Астрахань, Российская Федерация*

² *Астраханский государственный технический университет,
Астрахань, Российская Федерация*

Метод конечных элементов, получивший широкое распространение в прочностных расчётах машиностроительных конструкций, располагает значительным перечнем базовых конечных элементов, используемых для построения дискретных конечно-элементных расчётных динамических моделей (РДМ) грузоподъёмных кранов. Представлена статическая и динамическая характеристики параметров РДМ. Расчётная статическая модель служит для определения жёсткостных характеристик (формирования матрицы жёсткости) и определения напряжённо-деформированного состояния конструкций различными методами строительной механики, выбранными проектировщиком; по РДМ определяются динамические параметры для описания собственных и вынужденных колебаний крановых сооружений во время внешних воздействий. Анализ качества РДМ несущих металлоконструкций мостовых кранов, построенных на основе стержневых с открытым и замкнутым профилем и пластинчатых конечных элементов, выполнен на основе сравнения общей изгибной жёсткости пролётных балок и на основе сравнения собственных частот и собственных форм колебаний их РДМ. Приведена общая методология формирования уравнений движения для крановых систем со многими (n) степенями свободы на основе их стержневых и пластинчатых конечных элементов; последних – на основе теории пластин Кирхгофа. Проведён сравнительный анализ собственных форм колебаний пластинчатой и стержневой РДМ крана 130/32 т, пролётом 33,5 м, выявлены преимущества двух типов РДМ, важных для расчётного анализа прочности и сейсмостойкости при проектировании мостовых кранов. Обоснована необходимость разработки новых методов расчёта на конечно-элементной базе расчётных моделей, учёта пространственного характера воздействия. Рекомендовано рассматривать сооружения в качестве единых пространственных систем, учитывая различного характера нелинейности.

Ключевые слова: грузоподъёмный мостовой кран, метод конечных элементов, конечный элемент, тонкостенные стержни открытого и замкнутого профиля, расчётно-динамическая модель, уравнение движения, собственные колебания, собственные частоты, собственные формы.

Для цитирования: Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н. Сравнительный анализ расчетно-динамических моделей портовых кранов на основе одно- и двумерных конечных элементов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология. 2019. № 2. С. 127–144. DOI: 10.24143/2073-1574-2019-2-127-144.

Введение

Интенсивное развитие вычислительной техники привело к определённой переоценке традиционных взглядов в вопросах исследования прочности машиностроительных конструкций грузоподъёмных кранов, что позволило достаточно достоверно определять поля перемещений, деформаций и напряжений в исследуемых конструкциях. Для этих целей среди методов, ориентированных на эффективное использование ЭВМ, наибольшее признание получил метод конечных элементов (МКЭ), основой которого, как известно, при построении расчётно-динамических моделей является аппроксимация действительных конструкций некоторыми базовыми конечными элементами (КЭ), главенствующими среди которых являются тонкостенные стержни открытого и замкнутого профиля и пластинчатые КЭ.

В связи с этим становится очевидным, что для проведения динамического расчётного анализа пространственных конструкций грузоподъёмных кранов, составленных из стержней

открытого и замкнутого профиля либо из пластин (оболочек), как это следует из теории совместимых КЭ в рамках МКЭ, на необходимое для расчётов расчётное сочетание нагрузок требуется сформировать расчётно-динамическую конечно-элементную модель (РДМ) сооружения с n степенями свободы [1]. Поскольку стержневая РДМ крана представляется скелетными осями пролётных и концевых балок, элементов металлоконструкций грузовой тележки, конструктивных элементов обустройства крана проходными галереями и др., её построение на уровне конечно-элементной сетки признано считать менее трудоёмким, а значит, и более выгодным для практики проектировочного анализа. Наряду со стержневой РДМ крана, его пластинчатая модель представляется более сложной и более информационно ёмкой, прежде всего, позволяющей контролировать расчётные параметры НДС в любой точке поперечного сечения модельных элементов и, что важно, в сварных швах, в зонах примыкания диафрагм жёсткости к полкам и вертикалям главных и концевых балок моста и др. Таким образом, возникла необходимость оценить приоритетность стержневой и пластинчатой РДМ мостового крана на уровне их «динамических портретов», что особенно целесообразно при сейсмостойком проектировании грузоподъёмных кранов как линейно-спектральным методом (ЛСМ), так и методом динамического анализа (МДА) [2, 3].

Конечно-элементное построение расчётно-динамических моделей

Как известно, конечно-элементное уравнение движения РДМ крана имеет вид

$$[M]\{\ddot{V}(t)\} + \left[\gamma_3 ([M][K])^{0,5} \right] \{\dot{V}(t)\} + [K]\{V(t)\} = \{P_{ст}\} + \{P_{дин}\} - [M]\{\ddot{A}(t)\}, \quad (1)$$

в котором γ_3 – коэффициент потерь [4]:

$$\gamma_3 = 2\xi = 2 \left(\delta_3 \left[(2\pi)^2 + \delta_3^2 \right]^{-0,5} \right) \approx \frac{\delta_3}{\pi},$$

где δ_3 – логарифмический декремент затухания колебаний, в соответствии с которым коэффициент относительного демпфирования в (1) для стальных конструкций кранов лежит в диапазоне $\xi \leq 0,02 \div 0,04$, что соответствует логарифмическому декременту $\delta_3 = 0,125 \div 0,25$.

Очевидно, что в (1) $[M]_{n \times n}$ и $[K]_{n \times n}$ означают матрицы масс и жёсткости полной системы в общей системе координат (ОСК), сформированные из матриц масс и жёсткости отдельных КЭ в местной (для них) системе координат (МСК); $V(t)$ – вектор перемещений дискретных узлов конечно-элементной РДМ крана порядка $1 \times n$, параметры которого для отдельного стержневого jk КЭ имеют вид:

$$\{V(t)\}_{ОСК}^{jk} = \left\{ \begin{array}{l} (\delta_X \ \delta_Y \ \delta_Z \ \varphi_X \ \varphi_Y \ \Theta_Z \ \Theta'_Z)^{j,T} \\ (\delta_X \ \delta_Y \ \delta_Z \ \varphi_X \ \varphi_Y \ \Theta_Z \ \Theta'_Z)^{k,T} \end{array} \right\},$$

в котором T – индекс транспонирования, а первые три параметра обозначают линейные перемещения узла, три последующие – углы поворота, а последний – производную от угла закручивания (депланацию).

Векторы в правой части уравнения движения (1) обозначают внешние статические, динамические и кинематические воздействия, в которых $\{\ddot{A}(t)\}$ может обозначать акселерограмму расчётного землетрясения [5], выражение перед вектором скорости $\{\dot{V}\}$ – матрица затухания Мартемьянова – Цейтлина [6].

При расчётном анализе металлоконструкций кранов возникает вопрос о приоритете применения стержневых либо пластинчатых КЭ (рис. 1) с целью построения их РДМ, а также необходимость сравнительной характеристики стержневой и пластинчатой РДМ крана на уровне их «динамических портретов», т. е. на уровне их собственных частот (СЧ) и собственных форм (СФ) колебаний, полученных для дискретных стержневой и пластинчатой динамической системы (РДМ) кранового сооружения [7].

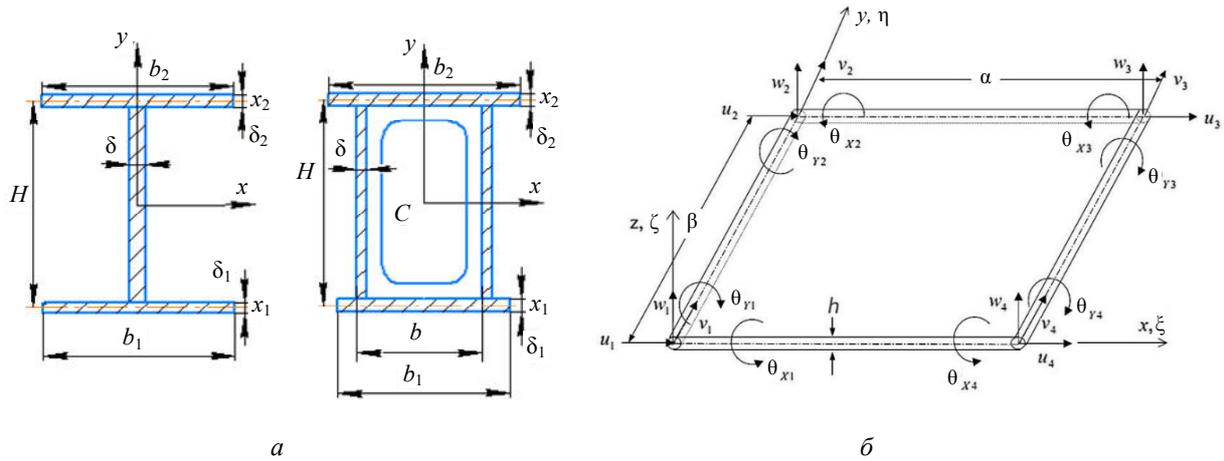


Рис. 1. Базовые конечные элементы: *a* – поперечные сечения тонкостенных стержней открытого и замкнутого профиля с $2 \times 7 = 14$ степенями свободы; *б* – тонкая пластина с $4 \times 5 = 20$ степенями свободы

Определение СЧ и СФ получается из решения уравнения свободных колебаний n -го порядка

$$[M]\{\ddot{V}(t)\} + [K]\{V(t)\} = \{0\}, \quad (2)$$

вытекающего, как частный случай, из (1). Как известно, матрица жёсткости (масс) в (1) полной стержневой системы кранового сооружения порядка $n \times n$, состоящей из S_{jk} КЭ, определяется методом суперпозиции:

$$[K]_{\text{ОСК}}^{n \times n} = \left(\sum_{jk=1}^{jk=S} \begin{bmatrix} [K]_{7 \times 7}^{jj} & [K]_{7 \times 7}^{jk} \\ [K]_{7 \times 7}^{kj} & [K]_{7 \times 7}^{kk} \end{bmatrix} \right)_{\text{ОСК}}^{14 \times 14}_{n \times n} \quad (3)$$

(матрица масс – с заменой индексов K на M), согласно которому матричная формула матрицы жёсткости (масс) отдельного стержневого КЭ jk $[K]_{\text{ОСК}}^{14 \times 14}$ в (3) распадается на четыре блока при

занесении их в исходную матрицу (3) порядка $n \times n$ $[K]_{\text{ОСК}}^{n \times n}$, в соответствии с нумерацией степеней свободы дискретных узлов j и k РДМ кранового сооружения. Укажем, что в (3)

$$[K]_{7 \times 7}^{kj} = \left([K]_{7 \times 7}^{jk} \right)^T, \quad (4)$$

где T – индекс транспонирования матриц. Кроме (4), следует иметь в виду, что в (3) матрица жёсткости (масс) КЭ jk переводится из МСК в ОСК с применением диагональной матрицы $[T]_{14 \times 14}^{jk}$

$$[K]_{\text{ОСК}}^{14 \times 14} = \left([T]_{14 \times 14}^{jk} \right)^T \left([K]_{\text{МСК}}^{14 \times 14} \right) \left([T]_{14 \times 14}^{jk} \right), \quad (5)$$

в которой

$$[T]_{14 \times 14}^{jk} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} [\Lambda]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & 0 \\ [0]_{3 \times 3} & [\Lambda]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{7 \times 7} & [0]_{7 \times 7} \\ [0]_{7 \times 7} & \begin{pmatrix} [\Lambda]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & 0 \\ [0]_{3 \times 3} & [\Lambda]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{7 \times 7} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а матрица $[\Lambda]_{3 \times 3}$ в (6) – матрица направляющих косинусов углов Эйлера β, α, γ (рис. 2)

$$[\Lambda]_{3 \times 3} = [\Lambda_\beta]_{3 \times 3} [\Lambda_\alpha]_{3 \times 3} [\Lambda_\gamma]_{3 \times 3}, \quad (7)$$

в которой, согласно линейному преобразованию координат узлов отдельного jk КЭ из МСК в ОСК, согласно матричной формуле (5), правая часть формулы (7) осуществляет преобразование МСК \rightarrow ОСК на углы β, α, γ в виде трёх исходных матриц $[\Lambda_{\beta(\alpha, \gamma)}]_{3 \times 3}$, произведение (7) которых позволяет получить матрицу $[\Lambda]_{3 \times 3}$ из (6):

$$[\Lambda]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

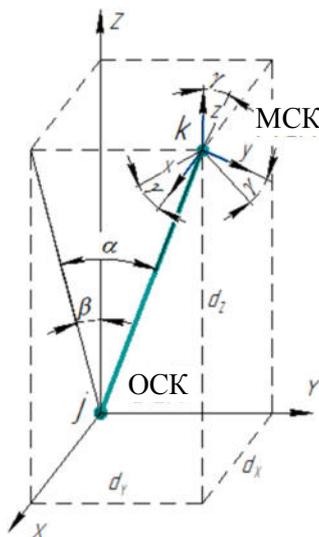


Рис. 2. Преобразование МСК \rightarrow ОСК координат для произвольного в пространстве конечного элемента jk

Значения углов α и β в формуле (8) рассчитываются из соотношений (рис. 2):

$$\sin \alpha = \frac{d_y}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}}; \quad \sin \beta = \frac{d_z}{\sqrt{d_x^2 + d_z^2}},$$

γ в (8) – угол чистого вращения, характеризующий поворот конечного элемента вокруг продольной оси z . Очевидно, что обратное преобразование ОСК \rightarrow МСК описывается транспонированной матрицей $[\Lambda]_{3 \times 3}^T$ из (8).

Для дискретного узла, имеющего 7 степеней свободы, матрица преобразования координат (6) будет иметь вид:

$$[T]_{7 \times 7}^j = \begin{bmatrix} [\Lambda]_{3 \times 3}^j & [0]_{3 \times 3} & 0 \\ [0]_{3 \times 3} & [\Lambda]_{3 \times 3}^j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

в которой $[0]_{3 \times 3}$ означает нулевую матрицу размером 3×3 , а единица в седьмой компоненте отражает модель деформации тонкостенного стержня, согласно которой сумма бимоментов в узле равна нулю. Для тонкостенного стержневого КЭ, имеющего 14 степеней свободы, матрица преобразования координат с учётом (9) может быть записана в виде (6).

Для практического применения матрица $[K]_{14 \times 14}^{jk}$ стержневого КЭ jk из (5) определяется модулями упругости E и G , Мпа; осевыми и полярными моментами инерции $I_{x(y,\rho)}$, m^4 ; длиной L , м; площадью поперечного сечения A , m^2 ; диаметром D , определяемым по формуле

$$D = \frac{4EJ_{\omega} (J_{\rho}^2 + J_z^2 - 2J_z J_{\rho})}{LJ_{\rho}^2 \mu^4},$$

в котором J_{ω} – секториальный момент инерции стержневого КЭ замкнутого профиля; J_{ρ} – его направленный момент; $\mu = 1 - (J_z / J_{\rho})$ [8].

Аналогично матрица распределённых масс стержневых КЭ jk в МСК имеет блочный вид [9], где ρ – объёмный вес материала, $кг/м^3$ КЭ jk , и дополнительно, аналогично (4),

$$[M]_{7 \times 7}^{kj} = \left([M]_{7 \times 7}^{jk} \right)^T.$$

Следует иметь в виду, что сосредоточенные массы транспортируемых краном полезных грузов и, при наличии, грузов балластов и противовесов крана учитываются в узлах РДМ по направлениям их линейных степеней свободы [8].

По аналогии с (2)–(6) двухкомпонентная матрица жёсткости пластины (см. рис. 1, б) состоит из матрицы жёсткости $[K]_{20 \times 20}^{(1)}$ плоского напряжённого состояния

$$[K]_{20 \times 20}^{(1)} = \frac{Eh}{24\alpha\beta(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} [K_1]_{10 \times 10}^{1,1} & [K_1]_{10 \times 10}^{1,2} \\ [K_1]_{10 \times 10}^{2,1} & [K_1]_{10 \times 10}^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

поле узловых перемещений $\{V\}$ которой записывается в виде вектора осевых и поперечных перемещений

$$\{V\} = \{u_1, v_1, \dots, u_4, v_4\}^T, \quad (11)$$

и второй компоненты $[K]_{20 \times 20}^{(2)}$ пространственного деформирования пластины

$$[K]_{20 \times 20}^{(2)} = \frac{Eh}{24\alpha\beta(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} [K_2]_{10 \times 10}^{1,1} & [K_2]_{10 \times 10}^{1,2} \\ [K_2]_{10 \times 10}^{2,1} & [K_2]_{10 \times 10}^{2,2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

поле узловых перемещений $\{V\}$ которой записывается в виде вектора поперечных (из плоскости пластины) и двух угловых перемещений (см. рис. 1, б):

$$\{V\} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \dots w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^T. \quad (13)$$

Очевидно, что ранг матриц (10) и (12) 20×20 определяется суммарным числом степеней свободы пластины, что следует из (11) и (13).

Дополнительно укажем, что в (10) $[K_1]_{10 \times 10}^{1,1} = [K_1]_{10 \times 10}^{2,2}$ [10, 11], а $[K_1]_{10 \times 10}^{2,1} = [K_1]_{10 \times 10}^{1,2}$. Матрица жёсткости (10) представляет собой реакции пластины в условиях плоского НДС, то есть от двух единичных перемещений каждого узла из (11), представленных на расчётной схеме КЭ пластины (см. рис. 1, б), а именно: u_i , $i=1, 2, 3, 4$ и v_i , $i=1, 2, 3, 4$, где i – нумерация узлов пластины, а полную матрицу КЭ пластины получают сложением матриц (10) и (12), причём компоненты матрицы (12) обусловлены перемещениями (13).

Двухкомпонентная матрица распределённых масс пластины вычисляется аналогично матрицам жёсткости (10) и (12) – из матрицы масс пластины $[M]_{20 \times 20}^{(1)}$ при плоском НДС и матрицы масс $[M]_{20 \times 20}^{(2)}$ при пространственном деформировании, приведёнными к одному рангу 20×20 , что представляется возможным, поскольку перемещения (11) u_{xi} и u_{yi} являются компонентами только плоского напряжённого состояния и не зависят от перемещений (13) $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ компонент изгиба.

Для обеспечения совместности пластинчатого и стержневых конечных элементов [12, 13], имеющих различные числовые значения узловых степеней свободы, введём в вектор перемещений каждого узла пластины угол поворота χ_i [14]

$$\{v\}_i = \{v_{xi} \ v_{yi} \ w_{zi} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \chi_i\}^T \quad (14)$$

и соответствующий вектору (14) фиктивный момент M_{zi} в векторе узловых внешних нагрузок

$$\{R'_p\} = \{Q_{xi} \ Q_{yi} \ N_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi}\}^T, \quad (15)$$

при этом векторы (14) и (15) связаны между собой зависимостью

$$\{Q\} = [K']\{v\} + \{R'_p\}, \quad (16)$$

в которой $\{Q\}$ – вектор внутренних усилий, а $\{R'_p\}$ – вектор внешних нагрузок на КЭ пластины, приведённый к его узловым степеням свободы. После чего в матрицу жёсткости отдельного i узла КЭ пластины введём коэффициент жёсткости и компоненту вектора внешних нагрузок, равные нулю, в которых индексы n и u означают «плоский» и «изгиб». Теперь очевидно, что глобальная матрица $[K]$ КЭ и её вектор реакций $\{R_p\}$ связаны с локальными матрицей $[K']_{6 \times 6}$ из (16) и вектором реакций $\{R'_p\}_{6 \times 6}$ зависимостями

$$[K]_{\text{ОСК}}^{24 \times 24} = [T][K']_{\text{МСК}}^{24 \times 24}[T]^T; \quad \{R_p\} = [T]\{R'_p\}, \quad (17)$$

в которых (17)

$$[T]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [T_0]_1 & & & \\ & [T_0]_2 & & \\ & & [T_0]_3 & \\ & & & [T_0]_4 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

матрица преобразования координат МСК→ОСК четырёхузловой пластины, где $m = 1, 2, 3, 4$, а $[T_0]_m$ в (18) – то же, но отдельного m -го узла.

В заключении настоящего раздела укажем, что матрица жёсткости и масс пластинчатой РДМ крана с n степенями свободы формируются методом суперпозиции, как это исполнено для стержневой РДМ крана, по формуле (3), а стержневая и пластинчатая РДМ мостового крана грузоподъёмностью 130/32 т, пролётом 33,5 м, построенные по предложенной выше методике, представлены на рис. 3.

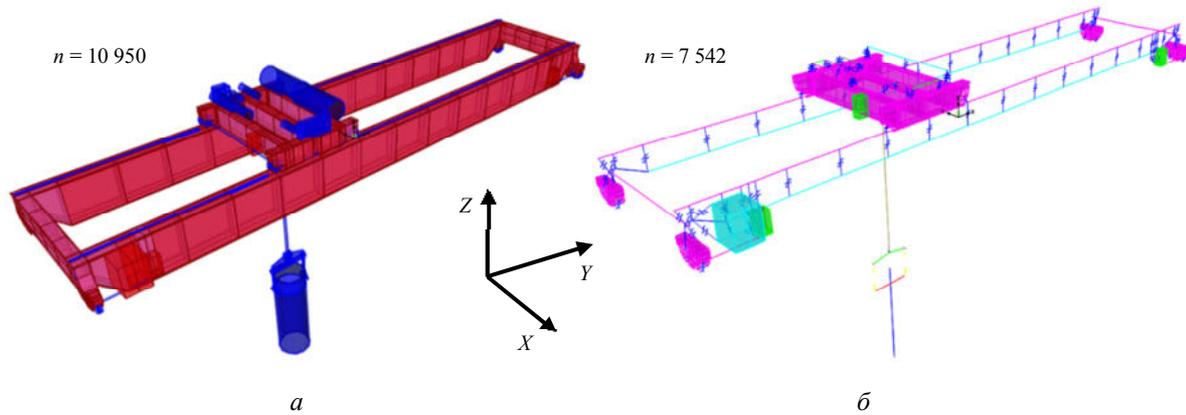


Рис. 3. РДМ мостового крана 130/32 т, 33,5 м:
 а – пластинчатая конечно-элементная РДМ мостового крана 130/32 т, 33,5 м, с траверсой под упаковку груза массой 100 т с $n = 10\,950$ степенями свободы;
 б – стержневая конечно-элементная РДМ мостового крана 130/32 т, 33,5 м, с траверсой под упаковку груза массой 100 т с $n = 7\,542$ степенями свободы

Статическая и динамическая характеристика параметров расчётно-динамических моделей

Для целей сравнительного анализа качества разработки РДМ на основе базовых пластинчатых и стержневых КЭ представлены конечно-элементные пластинчатая и стержневая РДМ мостового крана 130/32 т, 33,5 м, с траверсой под упаковку груза $Q = 100$ т с числом степеней свободы $n = 10\,950$ и $n = 7\,542$ соответственно (см. рис. 3, а, б), для сравнения эффективности которых на рис. 4 представлены результаты их статического расчёта по матричному уравнению

$$[K]\{V\} = P_{ст} \quad (19)$$

как частный случай уравнения (1) на полезную нагрузку $Q = 100$ т. Из полученных результатов ($\Delta z_{пл} = -21,6$ мм, $\Delta z_{ст} = -20$ мм) видно близкую изгибную жёсткость статической и динамической РДМ, отличающихся друг от друга на 2,4 %.

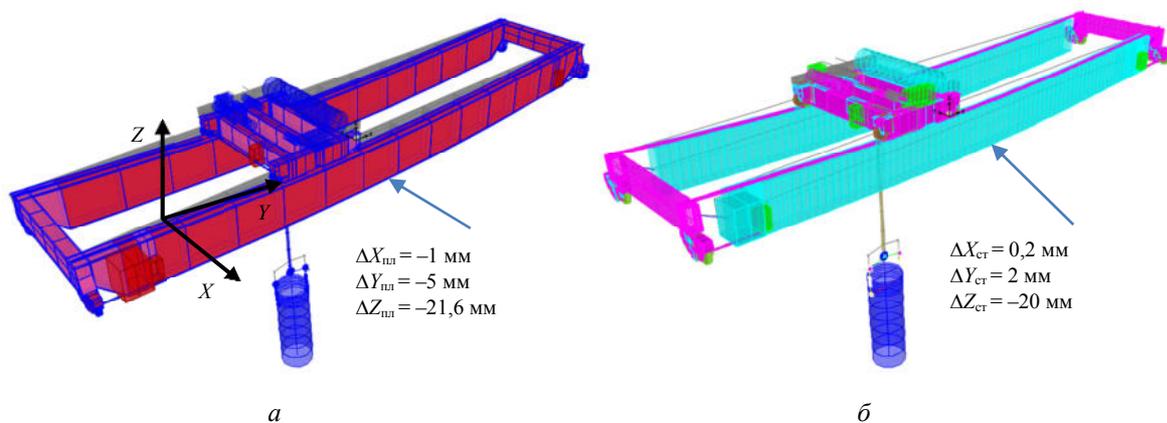


Рис. 4. Сравнительный анализ статического прогиба главных балок мостового крана 130/32 т, 33,5 м, загруженного полезным грузом 100 т:
 а – конечно-элементная пластинчатая РДМ крана;
 б – то же, стержневая РДМ (условно показаны поперечные сечения)

Для сравнения показателей качества пластинчатой и стержневой РДМ крана (см. рис. 3, а, б) на уровне их СЧ и СФ колебаний из уравнения (2) исключим время t и с помощью вектора перемещений

$$\{V(t)\} = [\Phi] \sin(\omega t + \vartheta) \quad (20)$$

и его второй производной по времени

$$\left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right\} = -[\Lambda][\Phi] \sin(\omega t + \vartheta) = -[\Lambda]\{V\} \quad (21)$$

перейдём к системе уравнений для собственных значений относительно форм колебаний [15]

$$[M]^{-1}[K][\Phi] - [\Phi][\Lambda] = \{0\},$$

в которой $[\Phi]$ – фундаментальная матрица произведения матриц $[M]^{-1}[K]$ порядка $n \times n$, составленная из собственных векторов, расположенных по столбцам

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \dots \{\phi_m\} \dots \{\phi_n\}] = \begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} \phi_{11} \\ \dots \\ \phi_{n1} \end{matrix} \right) & \dots & \left(\begin{matrix} \phi_{1m} \\ \dots \\ \phi_{nm} \end{matrix} \right) & \dots & \left(\begin{matrix} \phi_{1n} \\ \dots \\ \phi_{nn} \end{matrix} \right) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

характеризующая форму колебаний полной системы, у которой изменяются только амплитуды и ϑ – фазовый угол; $[\Lambda]$ – диагональная матрица собственных значений порядка $n \times n$, элементами которой являются квадраты собственных частот (табл.)

$$[\Lambda] = \left[\omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_\mu^2 \dots \omega_\nu^2 \right]_{\nu \times \nu}. \quad (23)$$

Мостовой кран 130/32 т, 33,5 м: сравнение СЧ (23) колебаний по пластинчатой и стержневой РДМ

№	Частота, Гц	
	Пластинчатая модель	Стержневая модель
1	0,575	0,575
2	0,904	0,905
3	2,599	2,724
4	3,239	3,325
5	3,801	3,802
6	5,426	5,939
7	5,959	6,216
8	6,849	7,525
9	7,286	7,884
10	7,449	10,415
11	10,416	11,875
12	10,526	13,111
13	10,789	14,665
14	11,951	15,644
15	13,067	16,001

№	Частота, Гц	
	Пластинчатая модель	Стержневая модель
16	13,478	17,095
17	13,687	17,748
18	15,635	18,792
19	16,069	19,367
20	17,368	20,563
21	17,836	21,314
22	18,422	22,145
23	19,131	23,295
24	19,728	25,689
25	21,582	27,657
26	21,954	31,188
27	22,256	33,284
28	23,349	35,706
29	23,483	37,879
30	25,050	38,535

Подставив выражения (20) и (21) в (2), получим:

$$-[\Lambda][M][\Phi] \sin(\omega t + \vartheta) + [K][\Phi] \sin(\omega t + \vartheta) = \{0\},$$

откуда приходим к уравнению для собственных значений (однородной системе):

$$(-[\Lambda][M] + [K])[\Phi] = \{0\}. \quad (24)$$

Условие нетривиальности решения однородной системы (24) приводит к частотному уравнению МКЭ в прямой форме:

$$\| [M]^{-1}[K] - [E][\Lambda] \| = 0, \quad (25)$$

легко разрешимому с помощью ЭВМ [16], где $[E]$ – единичная матрица.

Всегда следует принимать во внимание, что решение частотного уравнения, согласно (22) и (24), должно удовлетворять проверочному условию

$$[M]^{-1}[K] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^{-1},$$

значительным недостатком которого является необходимость вычисления матрицы $[M]^{-1}$, обратной к матрице масс.

Сравнительный анализ пластинчатой и стержневой расчётно-динамических моделей крана 130/32 т в режиме собственных колебаний

Сравнение пластинчатой и стержневой РДМ мостового крана 130/32 т, 33,5 м, на основе перемещений, полученных из решения (19), проводилось в режиме совпадающих СФ и СЧ колебаний, результаты представлены: по СЧ – см. табл., по совпадающим СФ – на рис. 5–13.

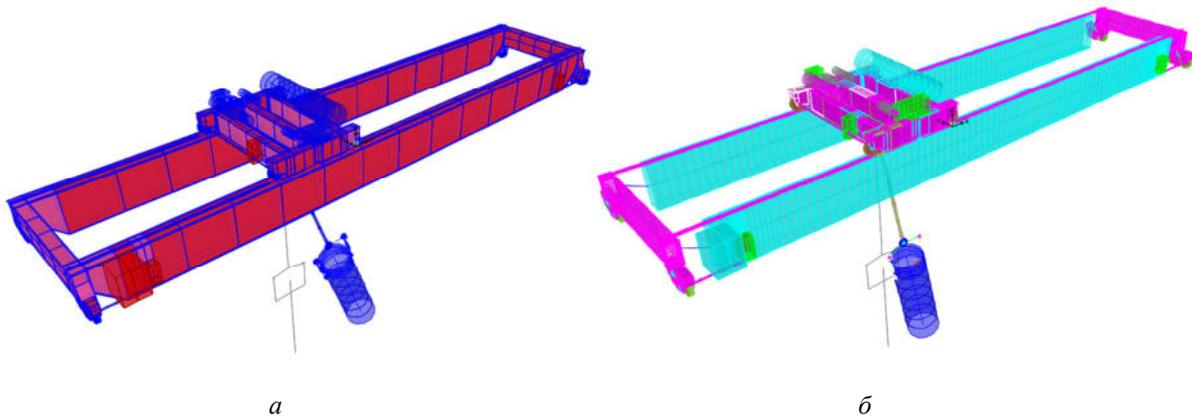


Рис. 5. Собственная форма колебаний № 1 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м, совпадающей на частоте 0,575 Гц: *а* – пластинчатая модель; *б* – стержневая модель

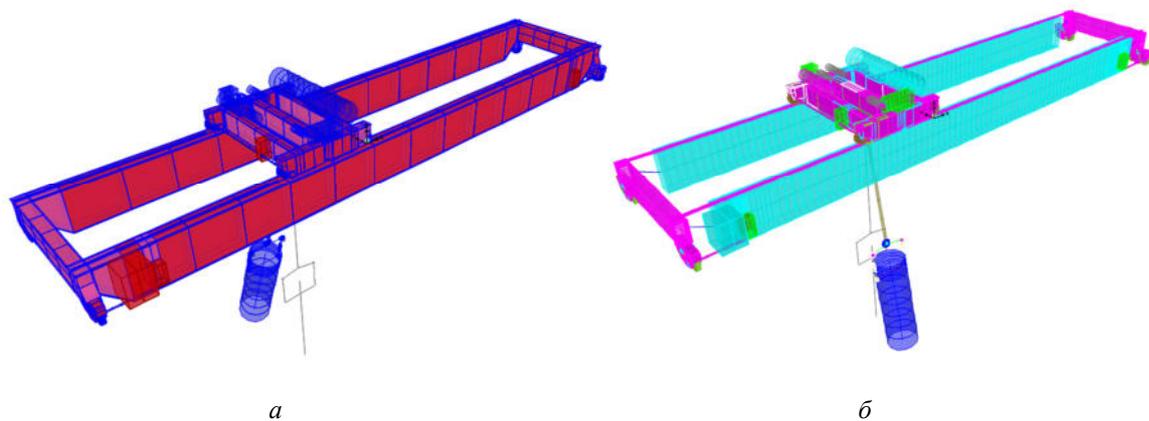


Рис. 6. Собственная форма колебаний № 2 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м, совпадающей на частоте 0,904 Гц: *а* – пластинчатая модель; *б* – стержневая модель

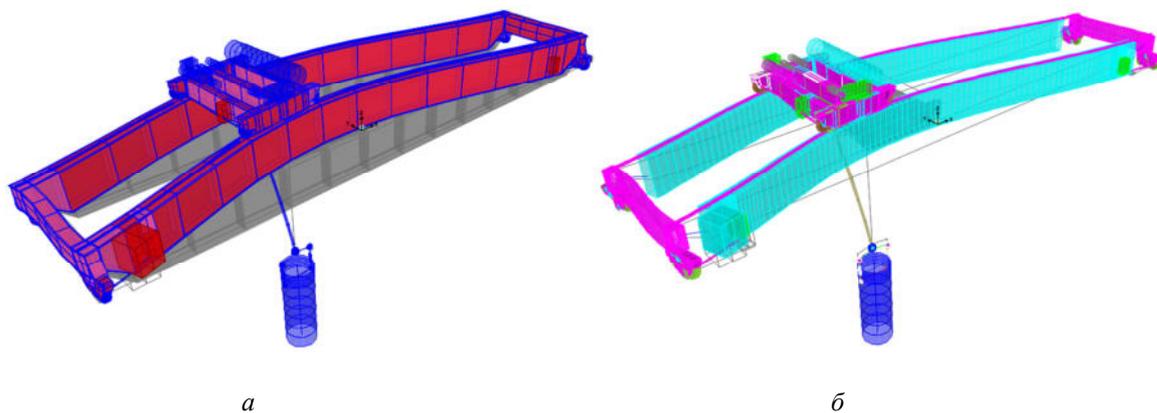


Рис. 7. Собственная форма колебаний № 3 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м:
a – пластинчатая модель на частоте 2,599 Гц; *б* – стержневая модель на частоте 2,724 Гц

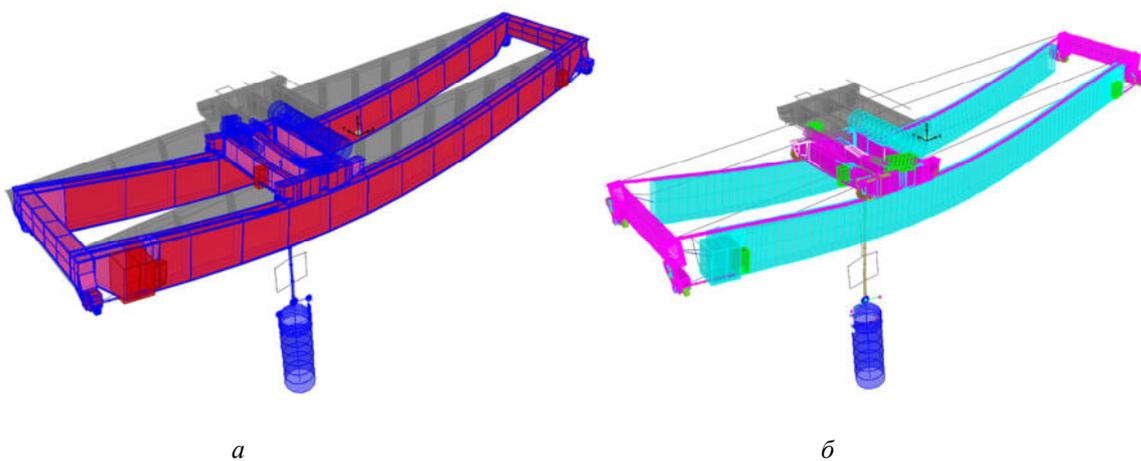


Рис. 8. Собственная форма колебаний № 4 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м:
a – пластинчатая модель на частоте 3,239 Гц; *б* – стержневая модель на частоте 3,325 Гц

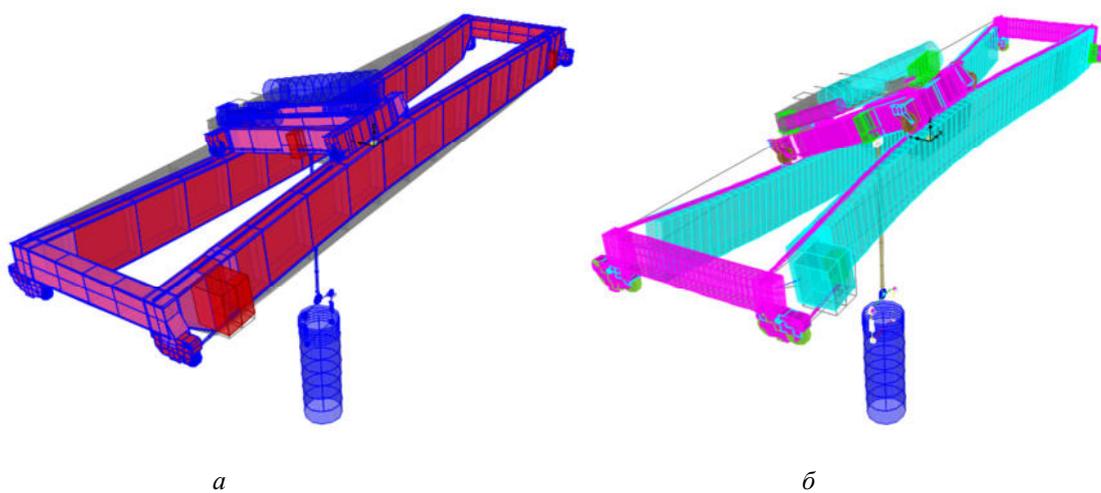


Рис. 9. Собственная форма колебаний № 5 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м:
a – пластинчатая модель на частоте 3,801 Гц; *б* – стержневая модель на частоте 3,802 Гц

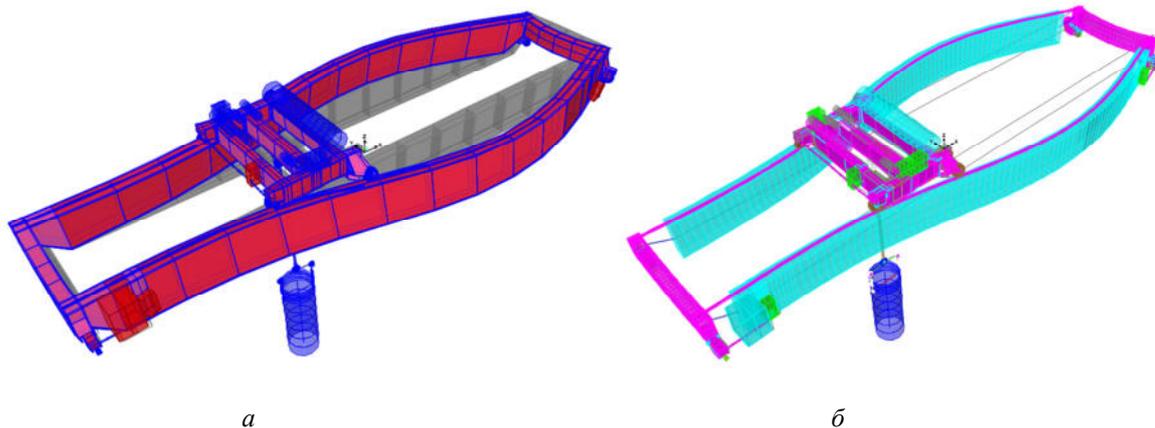


Рис. 10. Собственная форма колебаний № 6 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м:
a – пластинчатая модель на частоте 5,426 Гц; *б* – стержневая модель на частоте 5,940 Гц

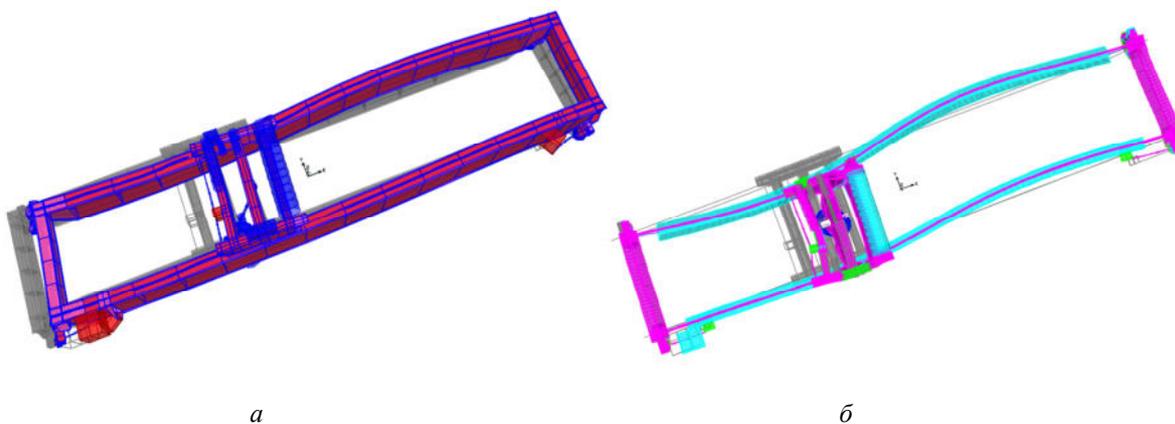


Рис. 11. Собственная форма колебаний № 7 (см. табл.) мостового крана 130/32 т, 33,5 м,
вид сверху на кран: *a* – пластинчатая модель на частоте 5,960 Гц;
б – стержневая модель на частоте 6,216 Гц

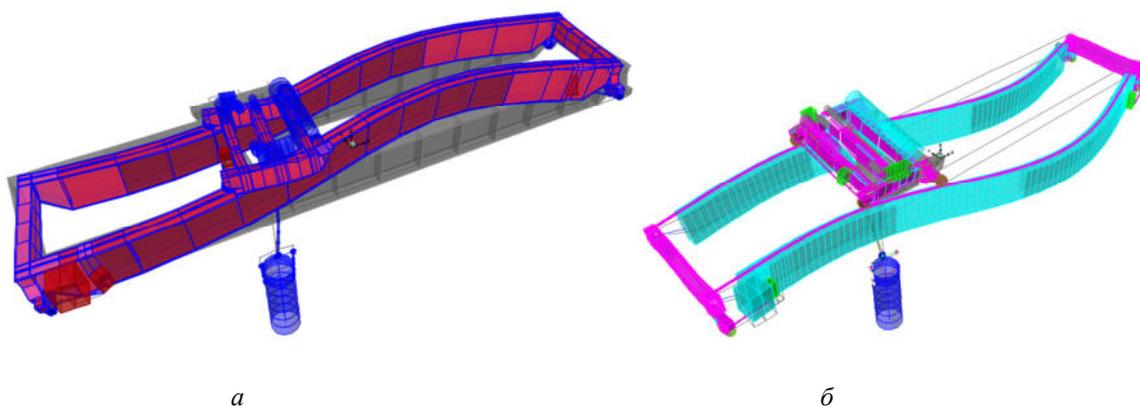


Рис. 12. Собственная (кососимметричная) форма колебаний № 8 (см. табл.)
мостового крана 130/32 т, 33,5 м: *a* – пластинчатая модель на частоте 6,850 Гц;
б – стержневая модель на частоте 7,525 Гц

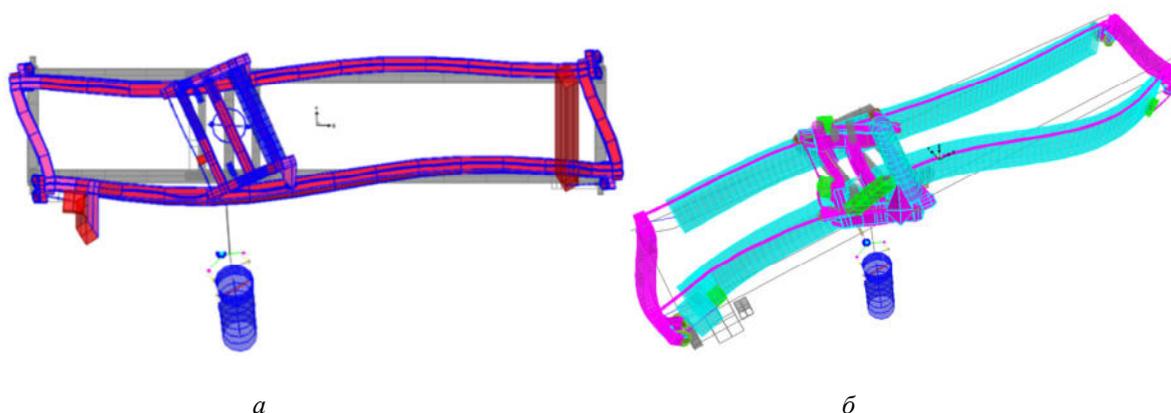


Рис. 13. Собственные кососимметричные формы колебаний мостового крана 130/32 т, 33,5 м (см. табл.):
a – пластинчатая модель (№ 14); *б* – стержневая модель (№ 15)

Можно отметить, что СЧ и СФ по низким частотам до 7,5 Гц практически совпадают, а начиная с СФ № 12 СЧ стержневой модели (РДМ) завышаются сначала на 2–3 Гц, а далее, в области СФ № 30, различие составляет 10–12 Гц и более (до 16–18 Гц), что графически представлено на рис. 14 [1].

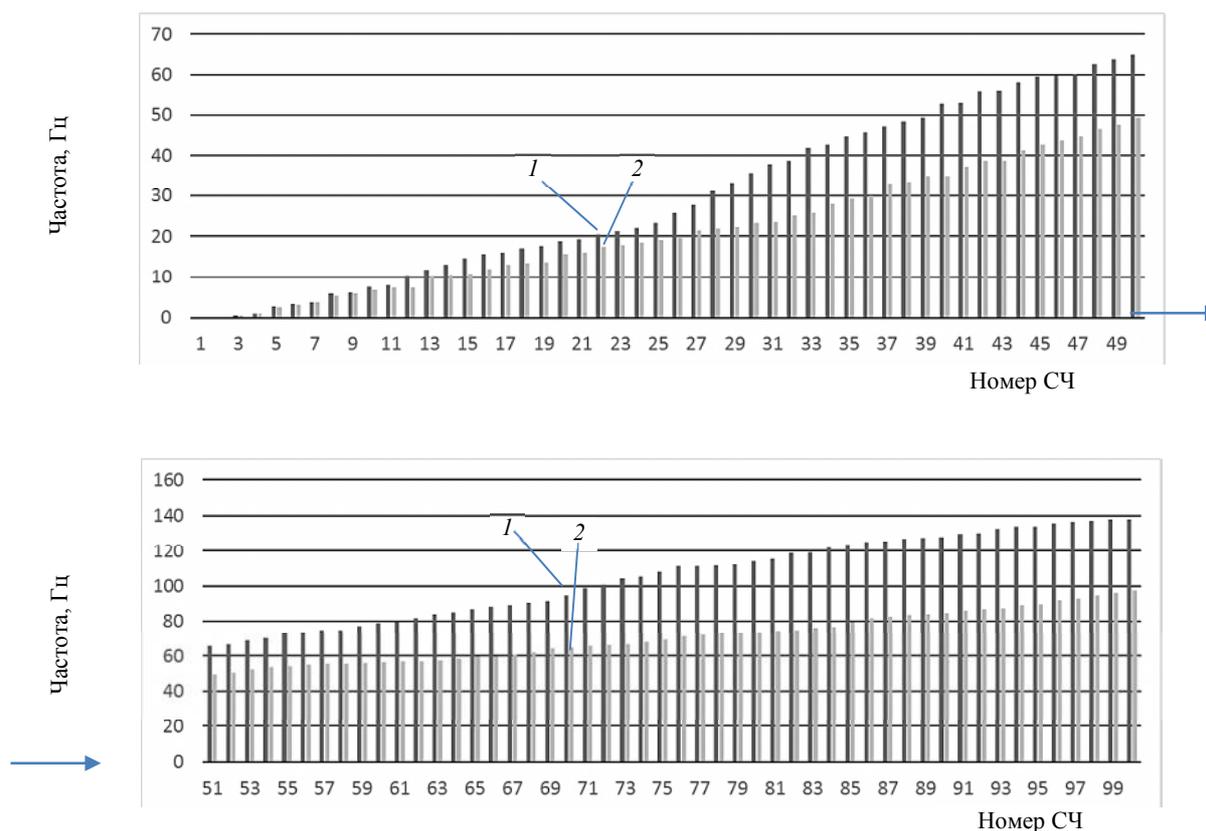


Рис. 14. Графическое представление сравнения СЧ пластинчатой и стержневой РДМ крана 130/32 т, 33,5 м – зависимость собственной частоты от её номера:
 1 – СФ и их частоты стержневой РДМ; 2 – то же, но пластинчатой РДМ (см. рис. 1, *a*, *б* и табл.)

Как подтверждает проведённый анализ, при формировании расчётных моделей крановых сооружений выделяют два типа моделей: расчётная статическая модель, которая служит для определения жёстких характеристик (формирования матрицы жёсткости) и определения напряжённо-деформированного состояния конструкций различными методами строительной ме-

ханики, выбранными проектировщиком, и расчётная динамическая модель (РДМ), по которой определяются динамические параметры для описания собственных и вынужденных колебаний крановых сооружений во время внешних воздействий. В процессе расчётов выполняются операции как перехода от расчётной статической модели к РДМ, так и наоборот [5].

Сравнительный анализ пластинчатой и стержневой расчётно-динамических моделей крана 130/32 т в режиме вынужденных (сейсмических) колебаний

Сравнение пластинчатой и стержневой РДМ определило, что при использовании ЛСМ для проектирования кранов в сейсмостойком исполнении [5] при ограниченном учёте генерирующих расчётные сейсмические нагрузки СЧ до 30 Гц (сейсмический спектр ответа на уровне головок рельс крановых рельсовых путей на рис. 15) для стержневой РДМ будет использовано 27 СФ, а для пластинчатой РДМ – 37 СФ (см. рис. 5).

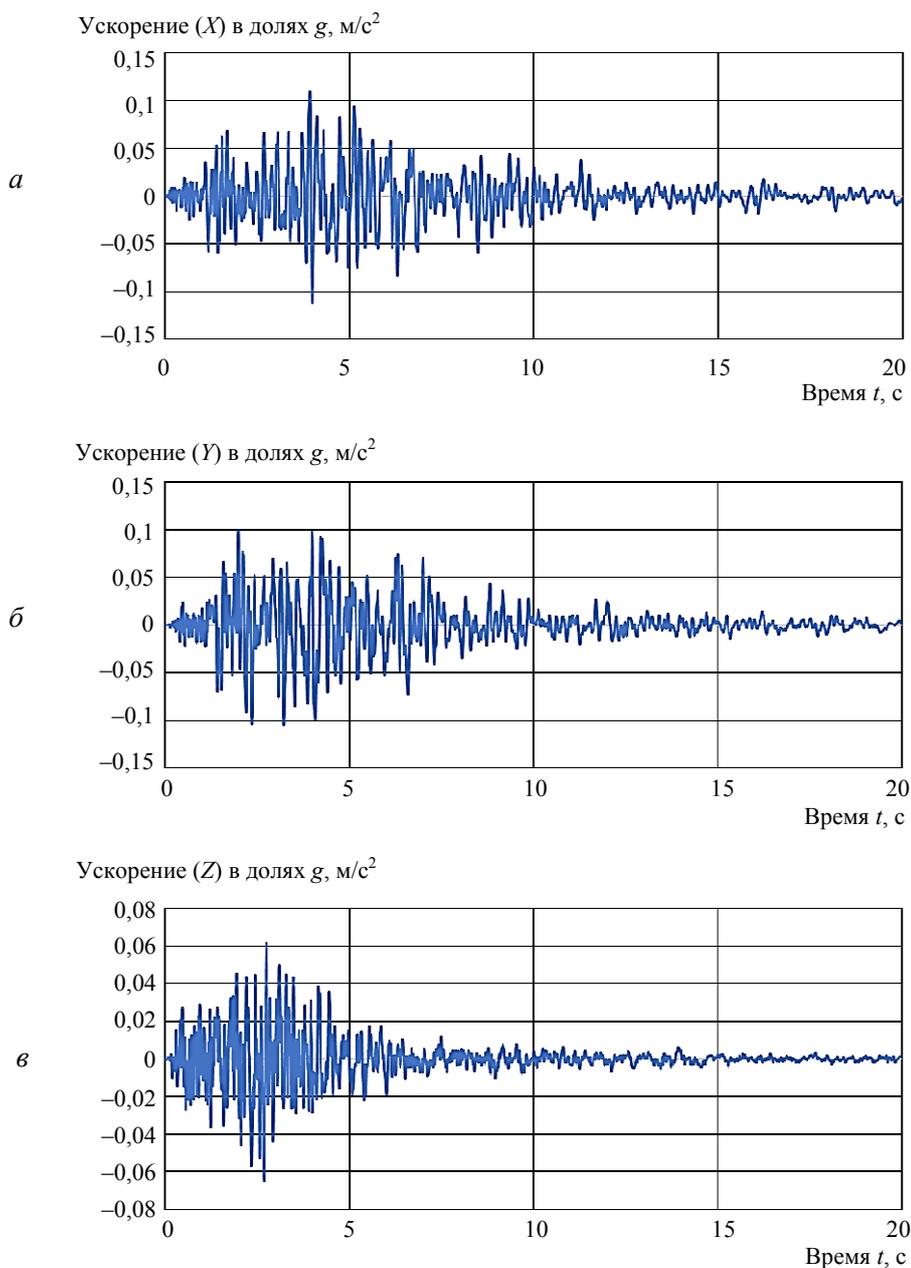


Рис. 15. Расчётная модельная акселерограмма 7 баллов по MSK-64 на уровне отметки кранового рельсового пути крана 130/32 т, 33,5 м [17]: а, б – горизонтальные компоненты x, y; в – вертикальная компонента z

Если следовать расчётной акселерограмме 7 баллов MSK-64 (рис. 15) [17] и её сейсмическому спектру ответа (рис. 16) [18], то для расчётного сейсмического анализа крана методом динамического анализа (МДА), например методом Гира, результаты эквивалентных напряжений в главных балках моста 39 и 47,6 Мпа, будут отличаться на 18 % (рис. 17).

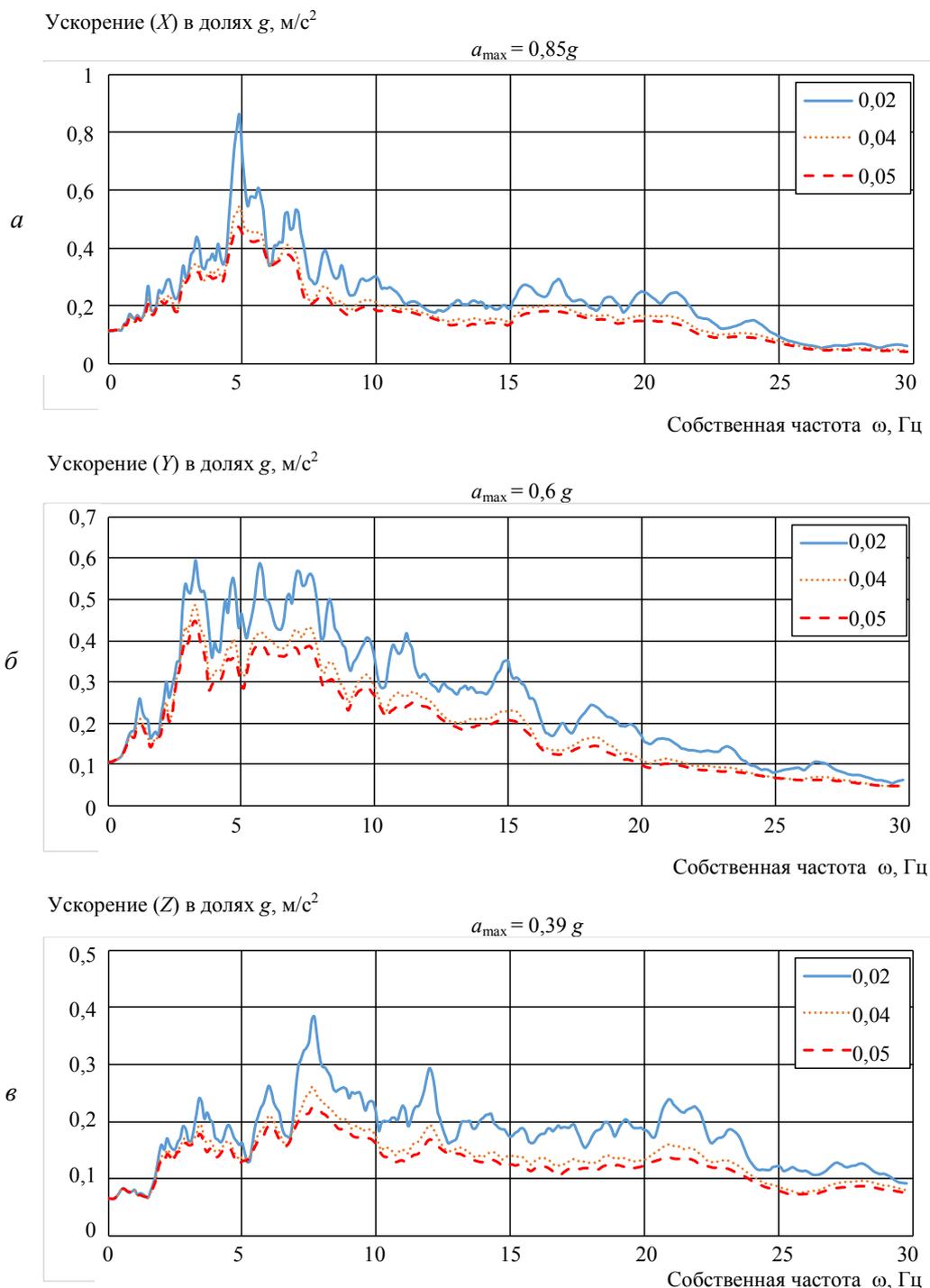


Рис. 16. Сейсмический спектр ответа акселерограммы 7 баллов по MSK-64 на уровне отметки головок рельс крановых рельсовых путей промышленного здания крана 130/32 т, 33,5 м, при относительном затухании 2, 4 и 5 %:
 a , b – горизонтальные компоненты x , y ; v – вертикальная компонента z

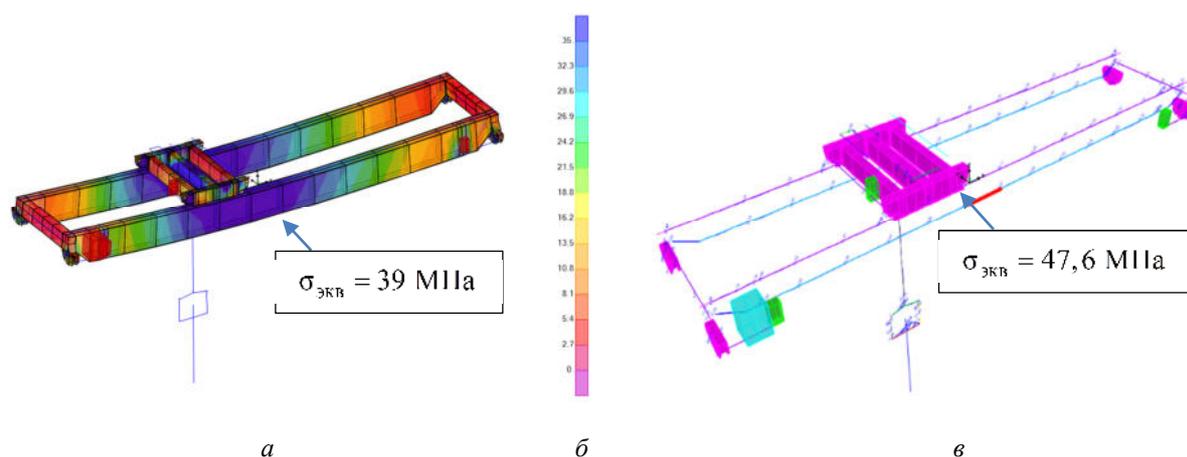


Рис. 17. Мостовой кран 130/32 т, 33,5 м: *а* – эквивалентные напряжения по III теории прочности в середине пролётной балки моста в момент времени действия акселерограммы $t = 3,3$ с, $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 39$ МПа на основе конечно-элементной пластинчатой РДМ (см. рис. 3, *а*); *б* – шкала эквивалентных нагружений; *в* – то же, 47,6 МПа, стержневой РДМ (см. рис. 3, *б*)

При расчётах ЛСМ, как это следует из сейсмического спектра ответа (см. рис. 16), расчётные сейсмические нагрузки на кран будут завышены при расчёте по стержневой РДМ на СФ от 22 до 36, что соответствует частотам от 20 до 30 Гц.

Заключение

Расчёт крановых сооружений на различные виды динамических воздействий, в том числе и на сейсмические воздействия, начинается с формирования расчётных моделей, образующих определённую иерархическую структуру, от качества которых зависят возможности самого расчёта сооружений. Практика выдвигает необходимость проектирования крановых сооружений новых и более сложных конструктивных форм, что требует разработки новых методов расчёта на конечно-элементной базе расчётных моделей. Требования по разработке современных проектов крановых сооружений удовлетворяется, если учитывается пространственный характер воздействия, а сооружения рассматриваются как единые пространственные системы, и учитываются различного характера нелинейности.

Авторы настоящей работы стремились облегчить действия проектировщиков по выбору РДМ между пластинчатой и стержневой, следуя предпочтениям уравнений движения типа (1), (20) и (25) и разработке на их основе методов расчёта, которые могут выполняться либо во временной области МДА, когда определяются непосредственно функции времени [2], удовлетворяющие уравнению (1), либо в частотной области, например ЛСМ [9, 15], когда определяются частоты и амплитуды ряда гармонических функций времени, удовлетворяющих уравнению движения (20). Дополнительным вкладом в пользу пластинчатой РДМ, как уже отмечалось, является возможность расчётного анализа НДС узловых сварных швов несущих конструкций кранов, проектируемых как пространственные сварные сооружения, что следует, в частности, из НП-043-11 [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасенко Н. Н., Синельщиков А. В., Рабей В. В., Синельщикова Л. С. Конечно-элементные компьютерные модели подъёмных сооружений // Современное машиностроение. Наука и образование: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. (Санкт-Петербург, 19–20 июня 2014 г.). СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. С. 743–756.
2. Синельщиков А. В. Численные методы нелинейного динамического анализа грузоподъёмных кранов // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер.: Подъёмно-транспортные машины и оборудование. 2003. Вып. 4. С. 77–84.
3. Panasenko N. N., Sinelshchikov A. V., Rabey V. V. The Calculated Justification of Seismic Stability of Load-Lifting Cranes // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2014. Vol. 9. P. 104–123.
4. Панасенко Н. Н., Рабей В. В., Синельщикова Л. С. Конечно-элементная модель демпфирования колебаний несущих металлоконструкций грузоподъёмных кранов // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. 2013. № 2 (56). С. 41–49.

5. *НП-043-11*. Правила устройства и безопасной эксплуатации грузоподъёмных кранов для объектов использования атомной энергии (ред. от 19 ноября 2013 г. № 549). М.: Ростехнадзор, 2014. 14 с.
6. *Цейтлин А. И.* Об учёте внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчёту сооружений // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 1981. № 4. С. 33–38.
7. *Панасенко Н. Н., Юзиков В. П.* Строительная механика тонкостенных стержней: моногр. / под ред. Н. Н. Панасенко. Волгоград: Волгоград. науч. изд-во, 2013. 361 с.
8. *Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н.* Динамика плавучего крана «Волгарь» на волнении моря // *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Морская техника и технология*. 2016. № 3. С. 32–42.
9. *Панасенко Н. Н., Божко С. Г.* Сейсмостойкие подъёмно-транспортные машины атомных станций. Красноярск: Изд-во КрасГУ, 1988. 208 с.
10. *Song K.* Development of the Velocity Transformation Function of Damped Flat Shell Finite Element for the Experimental Spatial Dynamics Modeling: master of science thesis. Virginia, 2000. 192 p.
11. *Белкин А. Е., Гаврюшин С. С.* Расчёт пластин методом конечных элементов: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 232 с.
12. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
13. *Евзоров И. Д.* Оценки погрешности по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов. Новосибирск: ВЦСО АН СССР, 1981. С. 54–61.
14. *Liu G. R., Quek S. S.* Finite Element Method: A Practical Course. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003. 384 p.
15. *Котельников В. С., Панасенко Н. Н., Синельщиков А. В.* Разработка модели землетрясений в расчётном анализе сейсмостойкости подъёмных сооружений // *Безопасность труда в промышленности*. 2007. № 9. С. 42–46.
16. *Панасенко Н. Н.* Динамика и сейсмостойкость подъёмно-транспортного оборудования атомных станций: дис. ... д-ра техн. наук. Ч. 1. Новочеркасск, 1992. 475 с.
17. *Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н., Мацеля В. И., Сеелев И. Н., Скурыдина Е. С., Хафизов Р. Р., Яковлев П. В.* Вероятностно-статистическая модель расчётного сейсмического воздействия на ОИАЭ г. Железнодорожка // *Механика XXI века*. 2016. № 15. С. 263–277.
18. *Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н., Синельщикова Л. С.* Математическая модель сейсмических спектров ответа для проектных основ сооружений с крановыми нагрузками // *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та*. 2012. № 1 (53). С. 66–74.

Статья поступила в редакцию 13.09.2018

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Синельщиков Алексей Владимирович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский государственный архитектурно-строительный университет; канд. техн. наук, доцент; зав. кафедрой прикладной механики и графики; sinelshikov@ausu.ru.

Панасенко Николай Никитович – Россия, 414056, Астрахань, Астраханский государственный технический университет; д-р техн. наук, профессор; профессор кафедры техники и технологии наземного транспорта, psastr@mail.ru.



COMPARATIVE ANALYSIS OF COMPUTABLE DYNAMIC MODELS OF PORT CRANES ON THE BASIS OF ONE AND TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

A. V. Sinelshchikov¹, N. N. Panasenko²

¹ *Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering, Astrakhan, Russian Federation*

² *Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Russian Federation*

Abstract. The finite element method is widely used in strength calculations of machine-building structures and has a significant list of basic finite elements used to build the discrete finite element computable dynamic models of load-lifting cranes. The article describes static and dynam-

ic characteristics of a computable dynamic model (CDM). CDM is designed to determine stiff features (developing stiffness matrix) and to define the deflected mode of the structures by using different means in structural mechanics, which have been chosen by a designer. Dynamic parameters are determined according to CDM to describe eigen and forced oscillations of crane structures under external action. The quality analysis of CDM of bearing metal structures of bridge cranes built on the basis of bar-shaped open and closed profiles and plate finite elements is based on comparison of the total flexural rigidity of the girders and eigen frequencies and eigenforms of oscillations of their CDM. The general methodology for building equations of motion for crane systems with many (n) degrees of freedom is based on their bar and plate finite elements, the latter are based on Kirchhoff theory of plates. Comparative analysis of the eigenforms of oscillations of the plate and bar CDM of crane with 130/32 t and 33.5m span has been given, the advantages of two types of CDM important for design analysis of strength and seismic resistance in designing bridge cranes are revealed. There has been substantiated the need to develop new methods of calculating finite element models taking into account the dimensional effect. The structures are recommended to regard as unified dimensional systems allowing for different types of non-linearity.

Key words: load-lifting bridge crane, finite element method, finite element, thin-walled open and closed bars, computational-dynamic model, equation of motion, natural oscillations, natural frequencies, eigenforms.

For citation: Sinel'shchikov A. V., Panasenko N. N. Comparative analysis of computable dynamic models of port cranes on the basis of one and two-dimensional finite elements. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Marine Engineering and Technologies*. 2019;2:127-144. (In Russ.) DOI: 10.24143/2073-1574-2019-2-127-144.

REFERENCES

1. Panasenko N. N., Sinel'shchikov A. V., Rabei V. V., Sinel'shchikova L. S. *Konechno-elementnye komp'yuternye modeli pod'emnykh sooruzhenii. Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Final element computer models of lifting mechanisms. Modern machine building. Science and education]. Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii (Sankt-Peterburg, 19–20 iyunia 2014 g.). Saint-Petersburg, Izd-vo Politehnicheskogo universiteta, 2014. Pp. 743-756.
2. Sinel'shchikov A. V. Chislennye metody nelineinogo dinamicheskogo analiza gruzopod'emnykh kranov [Numeric methods of nonlinear dynamic analysis of lifting cranes]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pod'emno-transportnye mashiny i oborudovanie*, 2003, iss. 4, pp. 77-84.
3. Panasenko N. N., Sinel'shchikov A. V., Rabey V. V. The Calculated Justification of Seismic Stability of Load-Lifting Cranes. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2014, vol. 9, pp. 104-123.
4. Panasenko N. N., Rabei V. V., Sinel'shchikova L. S. Konechno-elementnaia model' dempfirovaniia kolebanii nesushchikh metallokonstruktsii gruzopod'emnykh kranov [Final element model of damping oscillations of load-carrying steelworks of lifting cranes]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 2 (56), pp. 41-49.
5. NP-043-11. *Pravila ustroistva i bezopasnoi ekspluatatsii gruzopod'emnykh kranov dlia ob'ektov ispol'zovaniia atomnoi energii (red. ot 19 noiabria 2013 g. № 549)* [NP-043-11. Regulations of safe operational exploitation of lifting cranes in facilities of nuclear energy use]. Moscow, Rostekhnadzor Publ., 2014. 14 p.
6. Tseitlin A. I. Ob uchete vnutrennego treniia v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzhenii [On taking into account internal friction in regulatory documents on dynamis design of constructions]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 1981, no. 4, pp. 33-38.
7. Panasenko N. N., Iuzikov V. P. *Stroitel'naia mekhanika tonkostennykh sterzhnei: monografiia* [Building mechanics of thin-walled bars: monograph]. Pod redaktsiei N. N. Panasenko. Volgograd, Volgogradskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2013. 361 p.
8. Sinel'shchikov A. V., Panasenko N. N. Dinamika plavuchego krana «Volgar» na volnenii moria [Dynamics of floating crane VOLGAR in heavy sea]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaia tekhnika i tekhnologiya*, 2016, no. 3, pp. 32-42.
9. Panasenko N. N., Bozhko S. G. *Seismostoikie pod'emno-transportnye mashiny atomnykh stantsii* [Earthquake-resistant carrying and lifting machines in atomic power stations]. Krasnoiarsk, Izd-vo KrasGU, 1988. 208 p.
10. Song K. *Development of the Velocity Transformation Function of Damped Flat Shell Finite Element for the Experimental Spatial Dynamics Modeling: master of science thesis*. Virginia, 2000. 192 p.
11. Belkin A. E., Gavriushin S. S. *Raschet plastin metodom konechnykh elementov: uchebnoe posobie* [Design of plates using final element method]. Moscow, Izd-vo MGTU imeni N. E. Baumana, 2008. 232 p.
12. Perel'muter A. V., Slivker V. I. *Raschetnye modeli sooruzhenii i vozmozhnost' ikh analiza* [Design models of constructions and availability to analyze them]. Moscow, DMK Press, 2007. 600 p.

13. Evzerov I. D. *Otsenki pogreshnosti po peremeshcheniiam pri ispol'zovanii nesovmestnykh konechnykh elementov* [Evaluating of errors of displacement in using incompatible finite elements]. Novosibirsk, VTsSO AN SSSR, 1981. Pp. 54-61.

14. Liu G. R., Quek S. S. *Finite Element Method: A Practical Course*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2003. 384 p.

15. Kotel'nikov V. S., Panasenko N. N., Sinel'shchikov A. V. Razrabotka modeli zemletriasenii v raschetnom analize seismostoikosti pod"emnykh sooruzhenii [Developent of model of earthquakes in design analysis of seismic stability of lifting constructions]. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*, 2007, no. 9, pp. 42-46.

16. Panasenko N. N. *Dinamika i seismostoikost' pod"emno-transportnogo oborudovaniia atomnykh stantsii: dis. ... doktora tekhn. nauk* [Dynamics and seismic stability of lifting and handling machines in atomic power stations: Dissert. Doc. tech. sci.]. Part 1. Novocherkassk, 1992. 475 p.

17. Sinel'shchikov A. V., Panasenko N. N., Matselia V. I., Seelev I. N., Skurydina E. S., Khafizov R. R., Iakovlev P. V. Veroiatnostno-statisticheskaiia model' raschetnogo seismicheskogo vozdeistviia na OIAE g. Zheleznogorska [Probabilistic and statistical model of design seismic impact on facilities of nuclear energy use in Zheleznogorsk]. *Mekhaniki XXI veku*, 2016, no. 15, pp. 263-277.

18. Sinel'shchikov A. V., Panasenko N. N., Sinel'shchikova L. S. Matematicheskaiia model' seismicheskikh spektrov otveta dlia proektnykh osnov sooruzhenii s kranovymi nagruzkami [Mathematical model of seismic response spectra for project works of constructions with crane loads]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2012, no. 1 (53), pp. 66-74.

The article submitted to the editors 13.09.2018

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sinel'shchikov Alexey Vladimirovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Head of the Department of Applied Mechanics and Graphics; sinel'shchikov@aucu.ru.

Panasenko Nickolay Nikitovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State Technical University; Doctor of Technical Sciences, Professor; Professor of the Department of Technique and Technology of Land Transport; psastr@mail.ru.

