

Научная статья

УДК 639+574

<https://doi.org/10.24143/2073-5529-2024-2-42-48>

EDN ZDEFHO

## Подбор параметров моделей роста радужной форели

Елена Николаевна Коновальчикова, Евгений Евгеньевич Ивашко<sup>✉</sup>

Карельский научный центр Российской академии наук,  
Петрозаводск, Россия, [ivashko@krc.karelia.ru](mailto:ivashko@krc.karelia.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** Цель представленной работы заключается в оценке адекватности и подборе оптимальных параметров математических моделей роста рыбы в приложении к прогнозированию роста аквакультурной форели в установках замкнутого водоснабжения (УЗВ). Для выполнения оценки и сравнения рассмотрено 8 нелинейных математических моделей роста рыбы. В качестве эталона взяты табличные (параметрические) модели кормов для выращивания форели в УЗВ, на их основе выполнен подбор оптимальных параметров, приближающих каждую из математических моделей к эталонной. Сравнение результатов проводилось при помощи оценки среднеквадратичной ошибки, информационного критерия Акаике с поправкой на небольшой объем выборки и байесовского информационного критерия. В результате получены параметры, обеспечивающие наилучшее приближение рассматриваемых математических моделей роста рыбы к эталонной табличной функции. В результате оценки погрешностей установлено, что лучшую точность демонстрирует трехпараметрическая модель фон Берталанфи. При этом другие модели (за исключением экспоненциальной) также продемонстрировали точность, достаточную для использования на практике. Практическую значимость работы представляют выводы об адекватности использования нелинейных математических моделей для моделирования роста форели в УЗВ, а также представленные параметры моделей, обеспечивающие наилучшее приближение к эталонной табличной функции.

**Ключевые слова:** аквакультура, форель, установка замкнутого водоснабжения, математическая модель роста рыбы, модель фон Берталанфи, модель Гомперца, логистическая, экспоненциальная и степенная модели

**Благодарности:** исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00048, <https://rscf.ru/project/23-21-00048/>.

**Для цитирования:** Коновальчикова Е. Н., Ивашко Е. Е. Подбор параметров моделей роста радужной форели // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Рыбное хозяйство. 2024. № 2. С. 42–48. <https://doi.org/10.24143/2073-5529-2024-2-42-48>. EDN ZDEFHO.

Original article

## Fitting growth model parameters for rainbow trout

Elena N. Konovalchikova, Evgeny E. Ivashko<sup>✉</sup>

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences,  
Petrozavodsk, Russia, [ivashko@krc.karelia.ru](mailto:ivashko@krc.karelia.ru)<sup>✉</sup>

**Abstract.** The purpose of the presented work is to assess the adequacy and selection of optimal parameters of mathematical models of fish growth in application to forecasting the growth of aquaculture trout in closed water supply installations (CWSI). To perform the assessment and comparison, 8 nonlinear mathematical models of fish growth were considered. Tabular (parametric) models of feed for trout cultivation in the CWSI were taken as a standard, and on their basis the selection of optimal parameters was carried out, bringing each of the mathematical models closer to the standard one. The results were compared using an estimate of the standard error, the Akaike information criterion adjusted for a small sample size, and the Bayesian information criterion. As a result, the parameters providing the best approximation of the considered mathematical models of fish growth to the reference tabular function are obtained. As a result of the error estimation, it was found that the three-parameter von Bertalanfi model demonstrates the best accuracy. At the same time, other models (with the exception of exponential) have also demonstrated accuracy sufficient for practical use. The practical significance of the work is the conclusions on the adequacy of the use of nonlinear mathematical models for modeling trout growth in the CWSI, as well as the presented model parameters that provide the best approximation to the reference tabular function.

**Keywords:** aquaculture, trout, closed water supply installation, mathematical model of fish growth, von Bertalanfi model, Gompertz model, logistic, exponential and power models

**Acknowledgment:** the research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation No. 23-21-00048, <https://rscf.ru/project/23-21-00048/>.

**For citation:** Konovalchikova E. N., Ivashko E. E. Fitting growth model parameters for rainbow trout. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing industry. 2024;2:42-48.* (In Russ.). <https://doi.org/10.24143/2073-5529-2024-2-42-48>. EDN ZDEFHO.

## Введение

В товарной аквакультуре скорость роста навески рыбы является одним из важнейших показателей экономической и производственной эффективности. Значения показателей ожидаемого прироста рыбы лежат в основе производственного плана и определяют планы потребления кормов, логистики кормов, сортировки, вылова и отгрузки рыбы. На скорость роста рыбы влияет большое количество параметров: качество рыбопосадочного материала, возраст рыбы, используемые корма и режимы кормления, качество и химический состав воды и ряд других факторов. При выращивании рыбы в установках замкнутого водоснабжения (УЗВ) число неуправляемых параметров значительно снижается по сравнению с садковым или прудовым выращиванием.

Для анализа прироста, как правило, используются показатели абсолютной, относительной и удельной скорости роста рыбы, которые относятся к описательным моделям роста [1]. Популярность этих математических моделей связана с простотой использования, хорошей сопоставимостью результатов и понятной биологической интерпретацией. Однако по построению такие модели являются апостериорными и не могут дать прогнозных значений. К описательным моделям также относится температурный коэффициент роста (thermal growth coefficient, TGC), который может быть использован для прогнозирования размеров рыбы. Однако в исследованиях отмечается, что TGC не обладает хорошей точностью, поэтому предпринимаются попытки улучшения модели (см., например, [2]).

Помимо простых описательных моделей существует целый ряд нелинейных математических моделей роста рыбы, обзоры которых можно найти, например, в работах [1, 3–5]. Наиболее известной моделью роста является уравнение фон Бергаланфи, основанное на предположении о том, что изменение массы тела во времени является результатом различия между процессами анаболизма и катаболизма [6]. На основе базовой модели роста фон Бергаланфи были разработаны несколько ее разновидностей, например линейная и сезонная модели Бергаланфи [7, 8]. Как отмечают авторы работы [3], к наиболее часто используемым моделям в рыбохозяйственных исследованиях относятся трехпараметрическая модель фон Бергаланфи, трехпараметрическая модель Гомперца и трехпараметрическая логистическая модель.

В общем случае рост рыбы, в том числе и аквакультурной радужной форели, описывается нелинейным процессом, состоящим из 3-х фаз: экспоненциальной (молодь), линейной (молодая рыба) и ограниченной (зрелая рыба), поэтому соответствующая математическая модель роста должна описывать некоторую S-образную кривую. При исследовании процесса роста следует использовать мультимодельный подход, при котором на каждом этапе жизни для моделирования используется отдельная функция. Так, например, в работе [9] делается вывод о том, что для моделирования роста молоди лучше использовать степенную функцию роста, а для роста взрослой рыбы лучше подходит модель фон Бергаланфи.

Как правило, математические модели роста рыбы не учитывают внешних условий и режимов кормления, поскольку были разработаны в рамках исследований по рыболовству. В аквакультуре для оценки роста рыбы часто используются таблицы кормления (параметрические модели), описывающие суточные нормы кормления и коэффициенты прироста в зависимости от навески рыбы и внешних параметров, таких как температура воды и количество растворенного кислорода.

Цель представленной работы заключается в оценке адекватности и подборе оптимальных параметров восьми нелинейных математических моделей роста рыбы в приложении к прогнозированию роста аквакультурной форели в УЗВ. Для выполнения оценки и сравнения были рассмотрены 8 нелинейных математических моделей роста рыбы: двух- и трехпараметрические модели фон Бергаланфи, двух- и трехпараметрические модели Гомперца, двух- и трехпараметрические логистические модели, экспоненциальная и степенная модели. В качестве эталона взяты табличные (параметрические) модели кормов Skretting [10] Nutra HP и Optiline RC для выращивания форели в УЗВ. С помощью стандартных инструментов библиотеки Scipy языка Python, основанных на нелинейных методах наименьших квадратов, был выполнен подбор оптимальных параметров, приближающих каждую из математических моделей к эталонной. Сравнение результатов проводилось при помощи оценки среднеквадратичной ошибки, информационного критерия Акаике с по-

правкой на небольшой объем выборки, байесовского информационного критерия.

В итоге представлены параметры, обеспечивающие наилучшее приближение рассматриваемых нелинейных математических моделей роста рыбы к эталонной табличной функции. Результаты оценки погрешностей показали, что трехпараметрическая модель фон Бергаланфи демонстрирует лучшую точность, при этом другие модели (за исключением экспоненциальной) также показали точность, достаточную для использования на практике.

Практическую значимость работы представляют выводы об адекватности использования нелинейных математических моделей для моделирования роста форели в УЗВ, а также представленные параметры моделей, обеспечивающие наилучшее приближение к эталонной табличной функции.

### Материалы и методы

В качестве модельных данных была использована ранее упомянутая табличная модель роста ра-

дужной форели в УЗВ, представленная компанией Skretting. Табличная модель устанавливает суточные нормы кормления и кормовые коэффициенты для рыбы различной навески при различных температурах воды, определяющие траекторию роста.

Для сравнения были выбраны 8 нелинейных математических моделей роста: двух- и трехпараметрические модели фон Бергаланфи (2-VBGM, 3-VBGM), двух- и трехпараметрические модели Гомперца (2-GGM, 3-GGM), двух- и трехпараметрические логистические модели (2-LGM, 3-LGM), экспоненциальная модель (EGM) и степенная модель (PGM). Формулы расчета для моделей и набор параметров, некоторые из которых несут биологическую смысловую нагрузку, представлены в табл. 1, в которой используются следующие обозначения:  $W(t)$  – прогнозируемая навеска рыб (вес) в момент времени  $t$ ;  $W_{\infty}$  – предельная навеска рыбы;  $k$  – экспоненциальная скорость роста;  $t_0$  – возраст рыбы при нулевом весе;  $T$  – расположение точки перегиба;  $b, A_0$  – некоторые параметры.

Таблица 1

Table 1

### Формулы расчета для моделей роста

### Calculation formulas for growth models

Модель	Формула	Набор параметров	Источник
2-VBGM	$W(t) = W_{\infty} (1 - e^{-kt})^b$	$\{W_{\infty}, k, b\}$	[11]
3-VBGM	$W(t) = W_{\infty} \left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)^b$	$\{W_{\infty}, k, t_0, b\}$	[12]
2-GGM	$W(t) = W_{\infty} \cdot e^{-be^{-kt}}$	$\{W_{\infty}, k, b\}$	[13]
3-GGM	$W(t) = W_{\infty} \cdot e^{-be^{-k(t-T)}}$	$\{W_{\infty}, k, b, T\}$	[14]
2-LGM	$W(t) = W_{\infty} / \left(1 + be^{-kt}\right)$	$\{W_{\infty}, k, b\}$	[13]
3-LGM	$W(t) = W_{\infty} / \left(1 + be^{-k(t-T)}\right)$	$\{W_{\infty}, k, b, T\}$	[15]
EGM	$W(t) = A_0 e^{kt}$	$\{A_0, k\}$	[16]
PGM	$W(t) = A_0 t^k$	$\{A_0, k\}$	[17]

Для оценки параметров каждой модели использовался алгоритм Левенберга – Марквардта, который является одним из нелинейных методов наименьших квадратов [18, 19], реализованный с помощью стандартных инструментов библиотеки

Scipy языка Python. Точность подобранных моделей роста была оценена с помощью следующих метрик эффективности:

– среднеквадратичная ошибка

$$MSE = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$BIC = K \ln(n) + n \ln(MSE).$$

где  $n$  – объем данных;  $y_i$  – исходные данные;  $\hat{y}_i$  – прогнозируемые данные;  
 – информационный критерий Акаике ( $AICc$ ) с поправкой на небольшой объем выборки

$$AICc = 2K + n \ln(MSE) + \frac{2K(k+1)}{n-K-1},$$

где  $K$  – количество параметров в модели [20, 21];  
 – байесовский информационный критерий [22]

Модель с наименьшими значениями среднеквадратической ошибки и информационных критериев считается наилучшей для моделирования роста радужной форели.

### Результаты и обсуждение

Результаты подбора параметров моделей, обеспечивающих наилучшее приближение к эталонной табличной функции, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

Оценка набора параметров восьми моделей роста  
 Evaluation of a set of parameters for eight growth models

Модель	Параметр					
	$W_{\infty}$	$k$	$b$	$t_0$	$T$	$A_0$
2-VBGM	2,6938E+12	7,04E-07	2,60	–	–	–
3-VBGM	205 530,56	0,00059	3,32	–42,54	–	–
2-GGM	8 222,11	0,0037	7,25	–	–	–
3-GGM	8 222,11	0,0037	6,06	–	48,54	–
2-LGM	2 350,49	0,0138	131,24	–	–	–
3-LGM	2 350,49	0,0138	9,85	–	187,86	–
EGM	–	0,00935	–	–	–	42,2
PGM	–	2,5985	–	–	–	0,00028

Отдельные параметры исходных математических моделей имеют биологическое наполнение. Так, параметр  $W_{\infty}$  определяет предельную навеску рыбы, однако в результате подбора оптимальное значение варьирует в диапазоне от 2 350,49 г до 2,6938E+12 г, где максимальные значения получены для моделей фон Берталанфи, а наименьшие – для логистических моделей. Учитывая, что вес наиболее типичной особи радужной форели составляет 2 000–3 000 г, а максимальный зафиксированный вес форели достигает 25 400 г [23], наиболее адекватные значения параметра  $W_{\infty}$  дают логистические модели и модели Гомперца. Параметр экспоненциальной скорости  $k$  находится в диапазоне от 2,49E-07 до 2,5985, причем его наименьшие значения получены для двухпараметрической модели фон Берталанфи. Максимальные значения параметра  $k$  имеет степенная модель. Параметр  $t_0$ , указывающий на возраст молоди с нулевым весом в трехпараметрической модели фон Берталанфи, имеет от-

рицательное значение. Такое значение параметра объясняется тем, что в таблице кормления отсчет возраста рыб с массой 2,1 г начинается с 1. Потеря биологического содержания подобранных параметров является следствием ограниченности практической максимальной навески форели, выращиваемой в УЗВ.

О степени близости нелинейных моделей к эталонной можно судить по показателям эффективности, представленным в табл. 3.

Можно заметить, что модели показывают невысокую погрешность, а значит, каждую из них (кроме экспоненциальной модели) можно использовать на практике.

В последнем столбце табл. 3 представлен рейтинг моделей относительно их приближенности к эталонной. Согласно рейтингу, трехпараметрическая модель фон Берталанфи демонстрирует наилучшую точность аппроксимации.

Оценки качества аппроксимации моделей  
Estimates of the quality of model approximation

Модель	Критерий			Рейтинг
	MSE	AICc	BIC	
2-VBGM	19,44	1 160,35	2 631,75	4
3-VBGM	7,61	797,53	813,28	1
2-GGM	36,57	1 406,16	1 417,99	3
3-GGM	36,57	1 408,21	1 423,21	4
2-LGM	277,46	2 194,45	2 206,28	5
3-LGM	277,46	2 196,49	2 212,24	6
EGM	2 061,36	2 972,54	2 980,43	7
PGM	19,42	1 157,86	1 165,75	2

**Заключение**

В товарной аквакультуре скорость роста навески рыбы лежит в основе производственного плана и определяет планы потребления кормов, логистики кормов, сортировки, вылова и отгрузки рыбы. Для контроля скорости роста рыбы на предприятиях аквакультуры в основном применяются табличные (параметрические) модели, разрабатываемые производителями кормов для своей продукции. Наряду с табличными моделями существуют различные математические модели, используемые для прогнозирования и оценки темпов роста рыбы. Среди них наиболее часто используются нелинейные модели, такие как двух- и трехпараметрические модели фон Бергаланфи, двух- и трехпараметрические модели Гомперца, двух- и трехпараметрические логистические модели, экспоненциальная и степенная модели.

В представленной работе выполнена оценка адекватности и подбор параметров восьми нелинейных математических моделей в приложении к прогнозированию роста аквакультурной форели в УЗВ в сравнении с принятой за эталонную таб-

личной моделью. Такой подход имеет некоторые особенности. Во-первых, навеска рыбы по практическим причинам ограничивается 1,5 кг и двумя стадиями роста (молодь и молодая рыба), не образующими S-образной кривой. Во-вторых, в силу постоянства внешних условий в УЗВ, полученные модели имеют прогностическое свойство.

В ходе исследования получены параметры, наилучшим образом приближающие рассматриваемые модели к эталонной. Результат оценки погрешностей показал, что трехпараметрическая модель фон Бергаланфи демонстрирует лучшую точность. При этом другие модели (за исключением экспоненциальной) также показали точность, достаточную для использования на практике. Необходимо отметить, что в силу ограниченной навески рыбы параметры моделей перестают нести исходное заложенное биологическое наполнение (в частности,  $W_{\infty}$  – предельная навеска рыбы;  $t_0$  – возраст рыбы при нулевом весе).

Результаты исследования могут использоваться для моделирования роста форели на действующих предприятиях.

**Список источников**

1. Lugert V., Thaller G., Tetens J., Schulz C., Krieter J. A review on fish growth calculation: multiple functions in fish production and their specific application // *Reviews in Aquaculture*. 2014. V. 6. N. 1. P. 1–13. DOI: 10.1111/raq.12071.
2. Dumas A., France J., Bureau D. P. Evidence of three growth stanzas in rainbow trout (*Oncorhynchus mykiss*) across life stages and adaptation of the thermal-unit growth coefficient // *Aquaculture*. 2007. V. 216 (1–4). P. 139–146.
3. Flinn Sh. A., Midway S. R. Trends in Growth Modeling in Fisheries Science // *Fishes*. 2021. V. 6 (1). DOI: 10.3390/fishes6010001.
4. Llorente I., Luna L. Bioeconomic modeling in aquaculture: an overview of the literature // *Aquaculture International*. 2015. V. 24. P. 931–948.
5. Cacho O. J. Systems modeling and bioeconomic modeling in aquaculture // *Aquaculture Economics & Management*. 1997. V. 1 (1-2). P. 45–64.

6. von Bertalanffy L. A quantitative theory of organic growth // *Human Biology*. 1938. V. 10. P. 181–213.
7. Porch C. E., Wilson C. A., Nieland D. L. A new growth model for red drum (*Sciaenops ocellatus*) that accommodates seasonal and ontogenetic changes in growth rates // *Fishery Bulletin*. 2002. V. 100 (1). P. 149–152.
8. Stewart J., Robbins W. D., Rowling K., Hegarty A., Gould A. A multifaceted approach to modeling growth of the *Australian bonito*, *Sarda australis* (Family *Scombridae*), with some observations on its reproductive biology // *Marine and Freshwater Research*. 2013. V. 64. P. 671–678.
9. Day T., Taylor P. D. von Bertalanffy's growth equation should not be used to model age and size at maturity // *The American Naturalist*. 1997. V. 149 (2). P. 381–393.
10. Skretting. Каталог кормов. URL: [https://www.skretting.com/siteassets/local-folders/spain/russia/skretting\\_katalog-kormov\\_2020.pdf](https://www.skretting.com/siteassets/local-folders/spain/russia/skretting_katalog-kormov_2020.pdf) (дата обращения: 21.07.2023).
11. Fischer A. J., Baker M. S. Jr., Wilson Ch. A. Red snapper (*Lutjanus campechanus*) demographic structure in the northern Gulf of Mexico based on spatial patterns in growth rates and morphometrics // *Fishery Bulletin*. 2004. V. 102. P. 593–603.
12. Quinn T. J., Deriso R. B. *Quantitative Fish Dynamics* (Biological Resource Management). Oxford University Press, 1999. 550 p.
13. Richards F. J. A Flexible Growth Function for Empirical Use // *Journal of Experimental Botany*. 1959. V. 10 (2). P. 290–301. DOI: <https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>.
14. Tjørve K. M. C., Tjørve E. The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family // *PLoS ONE*. 2017. V. 12 (6). DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0178691>.
15. Ricker W. E. Growth rates and models // *Fish Physiology*. 1979. V. 8. P. 677–743.
16. Santos V. B., Yoshihara E., de Freitas R. T. F., Neto R. V. R. Exponential growth model of Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) strains considering heteroscedastic variance // *Aquaculture*. 2008. V. 274 (1). P. 96–100.
17. Huxley J. S. *Problems of relative growth*. London: Methuen & Co, 1932. 308 p.
18. Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1944. V. 2 (2). P. 164–168.
19. Madsen K., Nielsen H. B., Tingleff O. *Methods for Non-Linear Least Squares Problems*. Technical University of Denmark, 2004. 58 p.
20. Akaike H. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle // *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, eds F. Csáki and B. N. Petrov. Budapest: Akademiai Kiado, 1973. P. 267–281.
21. Hurvich C. M., Tsai C. L. Regression and time series model selection in small samples // *Biometrika*. 1989. V. 76. P. 297–307. DOI: [10.1093/biomet/76.2.297](https://doi.org/10.1093/biomet/76.2.297).
22. Schwarz G. Estimating the dimension of a model // *Annals of Statistics*. 1978. V. 6. Iss. 2. P. 461–464. DOI: [10.1214/aos/1176344136](https://doi.org/10.1214/aos/1176344136).
23. Мелкомасштабное разведение радужной форели. Технический документ ФАО по рыболовству и аквакультуре 561. Рим: ФАО, 2014. URL: <http://www.moktu.ru/assets/files/attachfiles/944/rukovodstvo-po-mm-razvedeniuu-foreli.pdf> (дата обращения: 21.07.2023).

## References

1. Lugert V., Thaller G., Tetens J., Schulz C., Krieter J. A review on fish growth calculation: multiple functions in fish production and their specific application. *Reviews in Aquaculture*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 1-13. DOI: [10.1111/raq.12071](https://doi.org/10.1111/raq.12071).
2. Dumas A., France J., Bureau D. P. Evidence of three growth stanzas in rainbow trout (*Oncorhynchus mykiss*) across life stages and adaptation of the thermal-unit growth coefficient. *Aquaculture*, 2007, vol. 216 (1-4), pp. 139-146.
3. Flinn Sh. A., Midway S. R. Trends in Growth Modeling in Fisheries Science. *Fishes*, 2021, vol. 6 (1). DOI: [10.3390/fishes6010001](https://doi.org/10.3390/fishes6010001).
4. Llorente I., Luna L. Bioeconomic modeling in aquaculture: an overview of the literature. *Aquaculture International*, 2015, vol. 24, pp. 931-948.
5. Cacho O. J. Systems modeling and bioeconomic modeling in aquaculture. *Aquaculture Economics & Management*, 1997, vol. 1 (1-2), pp. 45-64.
6. von Bertalanffy L. A quantitative theory of organic growth. *Human Biology*, 1938, vol. 10, pp. 181-213.
7. Porch C. E., Wilson C. A., Nieland D. L. A new growth model for red drum (*Sciaenops ocellatus*) that accommodates seasonal and ontogenetic changes in growth rates. *Fishery Bulletin*, 2002, vol. 100 (1), pp. 149-152.
8. Stewart J., Robbins W. D., Rowling K., Hegarty A., Gould A. A multifaceted approach to modeling growth of the *Australian bonito*, *Sarda australis* (Family *Scombridae*), with some observations on its reproductive biology. *Marine and Freshwater Research*, 2013, vol. 64, pp. 671-678.
9. Day T., Taylor P. D. von Bertalanffy's growth equation should not be used to model age and size at maturity. *The American Naturalist*, 1997, vol. 149 (2), pp. 381-393.
10. Skretting. *Katalog kormov* [Skretting. Feed catalog]. Available at: [https://www.skretting.com/siteassets/local-folders/spain/russia/skretting\\_katalog-kormov\\_2020.pdf](https://www.skretting.com/siteassets/local-folders/spain/russia/skretting_katalog-kormov_2020.pdf) (accessed: 21.07.2023).
11. Fischer A. J., Baker M. S. Jr., Wilson Ch. A. Red snapper (*Lutjanus campechanus*) demographic structure in the northern Gulf of Mexico based on spatial patterns in growth rates and morphometrics. *Fishery Bulletin*, 2004, vol. 102, pp. 593-603.
12. Quinn T. J., Deriso R. B. *Quantitative Fish Dynamics* (Biological Resource Management). Oxford University Press, 1999. 550 p.
13. Richards F. J. A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*, 1959, vol. 10 (2), pp. 290-301. DOI: <https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>.
14. Tjørve K. M. C., Tjørve E. The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family. *PLoS ONE*, 2017, vol. 12 (6). DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0178691>.
15. Ricker W. E. Growth rates and models. *Fish Physiology*, 1979, vol. 8, pp. 677-743.
16. Santos V. B., Yoshihara E., de Freitas R. T. F., Neto R. V. R. Exponential growth model of Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) strains considering heteroscedastic variance. *Aquaculture*, 2008, vol. 274 (1), pp. 96-100.

17. Huxley J. S. *Problems of relative growth*. London, Methuen & Co, 1932. 308 p.
18. Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1944, vol. 2 (2), pp. 164-168.
19. Madsen K., Nielsen H. B., Tingleff O. Methods for Non-Linear Least Squares Problems. *Technical University of Denmark*, 2004. 58 p.
20. Akaike H. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, eds F. Csáki and B. N. Petrov. Budapest, Akademiai Kiado, 1973. Pp. 267-281.
21. Hurvich C. M., Tsai C. L. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 1989, vol. 76, pp. 297-307. DOI: 10.1093/biomet/76.2.297.
22. Schwarz G. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 1978, vol. 6, iss. 2, pp. 461-464. DOI: 10.1214/aos/1176344136.
23. *Melkomasshtabnoe razvedenie raduzhnoi foreli. Tekhnicheskii dokument FAO po rybolovstvu i akvakul'ture 561* [Small-scale breeding of rainbow trout. FAO Technical Document on Fisheries and Aquaculture 561]. Rim, FAO, 2014. Available at: <http://www.moktu.ru/assets/files/attach-files/944/rukovodstvo-po-mm-razvedeniiu-foreli.pdf> (accessed: 21.07.2023).

Статья поступила в редакцию 16.08.2023; одобрена после рецензирования 09.11.2023; принята к публикации 22.05.2024  
The article was submitted 16.08.2023; approved after reviewing 09.11.2023; accepted for publication 22.05.2024

#### **Информация об авторах / Information about the authors**

**Елена Николаевна Коновальчикова** – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник лаборатории цифровых технологий регионального развития отдела комплексных научных исследований; Карельский научный центр Российской академии наук; [konovalchikova\\_en@mail.ru](mailto:konovalchikova_en@mail.ru)

**Elena N. Konovalchikova** – Candidate of Physico-Mathematical Sciences; Researcher of the Laboratory of Digital Technologies in Regional Development, Department of Multidisciplinary Scientific Research; Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences; [konovalchikova\\_en@mail.ru](mailto:konovalchikova_en@mail.ru)

**Евгений Евгеньевич Ивашко** – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории цифровых технологий регионального развития отдела комплексных научных исследований; Карельский научный центр Российской академии наук; [ivashko@krc.karelia.ru](mailto:ivashko@krc.karelia.ru)

**Evgeny E. Ivashko** – Candidate of Physico-Mathematical Sciences; Senior Researcher of the Laboratory of Digital Technologies in Regional Development, Department of Multidisciplinary Scientific Research; Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences; [ivashko@krc.karelia.ru](mailto:ivashko@krc.karelia.ru)

