УПРАВЛЕНИЕ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

MANAGEMENT IN ORGANIZATIONAL SYSTEMS

Научная статья
УДК 330.42, 338.5.018.5, 519.2, 004.942
https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-4-54-65
EDN QRVDOL

Вероятностная модель дуополии

Андрей Вячеславович Михеев

Казанский национальный исследовательский технологический университет,
Казань, Россия, veehima@gmail.com

Аннотация. Построена вероятностная модель дуопольного рынка. Модель основана на предположении о случайном характере экономических величин, определяющих рыночное поведение потребителей и фирм-конкурентов: покупательской способности; полных издержек, связанных с производством и продажей единицы товара; цен на товар, устанавливаемых фирмами. В рамках построенной модели для каждого дуополиста найдены математические ожидания полученной прибыли и количества проданного товара в виде функционалов от плотностей распределения вероятностей покупательской способности, издержек и цен на товар. Рассмотрено несколько частных случаев, когда законы распределения покупательской способности, издержек и цен являются либо показательными, либо вырожденными. В каждом из этих случаев проведено численное моделирование, определены виды дуополистической взаимосвязи между фирмами, приводящие к рыночным равновесиям Курно и Бертрана, а также установлены экономические критерии устойчивости этих состояний равновесия дуопольного рынка. Показано, что если все случайные величины, входящие в вероятностную модель, имеют показательные законы распределения, то на дуопольном рынке может возникнуть состояние равновесия, отличное от равновесия Курно и равновесия Бертрана.

Ключевые слова: дуополия, покупательская способность, издержки производства и продажи, цена на товар, прибыль, объем продаж, равновесие Курно, равновесие Бертрана, плотность распределения вероятностей, математическое ожидание

Для цитирования: *Михеев А. В.* Вероятностная модель дуополии // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 4. С. 54–65. https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-4-54-65. EDN QRVDOL.

Original article

Probabilistic duopoly model

Andrej V. Mikheev

Kazan National Research Technological University,
Kazan, Russia, veehima@gmail.com

Abstract. A probabilistic model of the duopoly market is constructed. The model is based on the assumption of the random nature of economic variables that determine the market behavior of consumers and competing firms: purchasing power; total costs associated with the production and sale of a unit of goods; commodity prices set by firms. Within the framework of the constructed model, expected values of the profit received and the amount of goods sold were found in the form of functionals of the probability density functions of purchasing power, costs, and prices for goods. Several special cases are considered when the laws of distribution of purchasing power, costs and prices are either exponential or degenerate. In each case numerical modeling was carried out, types of duopolistic relationships between the firms leading to Cournot and Bertrand market equilibria were determined, and economic criteria for the stability of these duopoly market equilibria were established. It is shown that if all random variables included in the probabilistic model have exponential distribution laws, then in the duopoly market may arise an equilibrium state that is different from the Cournot equilibrium and the Bertrand equilibrium.

Keywords: duopoly, purchasing power, production and sales costs, product price, profit, volume of sales, Cournot equilibrium, Bertrand equilibrium, probability density function, expected value

For citation: Mikheev A. V. Probabilistic duopoly model. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2022;4:54-65. (In Russ.). https://doi.org/10.24143/2073-5529-2022-4-54-65. EDN QRVDOL.

Введение

Рынок товара (услуги) называется дуопольным, если реализацию товара (услуги) на этом рынке осуществляют две конкурирующих фирмы [1]. В современной мировой экономике существует много примеров дуополий, когда две фирмы контролируют весь или почти весь рынок некоторого товара (услуги):

1. На мировом рынке электронных платежей доминируют Visa и Mastercard. Другим платежным системам принадлежит незначительная часть этого рынка.

2. Рынок гражданских самолетов практически полностью принадлежит Boeing и Airbus. Существуют и другие фирмы, производящие гражданские самолеты по уникальным технологиям, например корпорация «Сухой» в России, но их влияние на данный рынок незначительно.

3. Apple iOS и Google Android образуют классическую дуополию на рынке мобильных операционных систем. Попытки других фирм войти на этот рынок со своими разработками (мобильная платформа Bada и ОС Tizen от Samsung Electronics, мобильная версия операционной системы Ubuntu и др.) пока не увенчались успехом.

4. Intel и AMD – пример чистой дуополии на рынке центральных процессоров для персональных компьютеров, ноутбуков и серверов. Одним из немногих конкурентов этих двух фирм на данном рынке является российская компания Baikal Electronics, однако принадлежащая ей доля рынка центральных процессоров несущественна.

Естественной стратегией поведения любого дуополиста на рынке является максимизация прибыли, полученной им от реализации товара на некотором промежутке времени. Вследствие этого традиционным математическим описанием дуополии служит следующая оптимизационная задача [1, 2]:

$$\begin{cases} Z_i = Q_i \cdot p(Q_1, Q_2) - \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij}^* Q_{ij}^* \to \max, \\ Q_i = f_i\left(Q_{i1}^*, Q_{i2}^*, \ldots, Q_{in_i}^*\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $i \in \{1, 2\}$ – номер дуополиста в модели; Z_i – прибыль, полученная i-м дуополистом; Q_i – количество товара, произведенного и реализованного на рынке i-м дуополистом на рассматриваемом промежутке времени; n_i – количество ресурсов (факторов производства), используемых i-м дуополистом для производства товара; $p(Q_1, Q_2)$ – равновесная рыночная цена на товар; Q_{ij}^* – объем j-го фактора производства, необходимый для выпуска i-м дуополистом Q_i единиц товара на рассматриваемом промежутке времени; p_{ij}^* – цена, в которую обходится i-му дуополисту единица объема j-го фактора производства; $f_i\left(Q_{i1}^*, Q_{i2}^*, \ldots, Q_{in_i}^*\right)$ – производственная функция, соответствующая производственному процессу i-го дуополиста.

С точки зрения теории игр задача (1) представляет собой антагонистическую игру (игру с нулевой суммой), в которой участвуют две конкурирующие фирмы [2]. Решением задачи (1) или, другими словами, равновесием Нэша в антагонистической игре (1) являются объемы производства дуополистов (Q_1, Q_2) и связанные с этим объемы затраченных факторов производства $\left(Q_{i1}^*, Q_{i2}^*, \ldots, Q_{in_i}^*\right)$, максимизирующие прибыль фирм-конкурентов.

Математическая модель дуополии (1) обладает рядом недостатков:

1. В (1) предполагается, что потребители покупают весь товар, произведенный и поставленный на рынок фирмами-конкурентами на рассматриваемом промежутке времени. Очевидно, что это предположение верно не всегда, т. к. суммарное количество товара, приобретенное потребителями

на данном промежутке времени, может быть меньше суммарного объема производства дуополистов. По этой причине в (1) под Q_i правильнее понимать не объем производства i-го дуополиста, а фактическое количество товара, приобретенное у него потребителями.

2. В математической модели (1) явно не указана стратегия рыночного поведения потребителей. Утверждается лишь, что потребители всегда покупают товар по одной и той же равновесной рыночной цене. Однако в реальности цены на товар у дуополистов могут быть разными и могут отличаться от равновесной рыночной цены. Более того, на рассматриваемом промежутке времени цены на товар у конкурирующих фирм могут изменяться. Все эти ситуации остаются за рамками модели (1).

3. Оптимизационная задача (1) не учитывает случайную природу ключевых экономических величин, определяющих прибыли дуополистов. Действительно, величины Q_i, Q_{ij}^*, $p(Q_1, Q_2)$, p_{ij}^* могут непредсказуемым образом меняться как на рассматриваемом промежутке времени, так и при переходе от одного промежутка времени к другому, если прибыль подсчитывается для ансамбля идентичных промежутков времени. Возможность таких изменений делает величины Q_i, Q_{ij}^*, $p(Q_1, Q_2)$, p_{ij}^* случайными. Однако в (1) это не принимается во внимание.

Кроме того, при решении оптимизационной задачи (1) обычно совершают приближения, которые ограничивают возможности традиционного математического описания дуополии:

1) технологии производства у фирм-конкурентов, а также цены, по которым они приобретают необходимые ресурсы, одинаковы: $n_1 = n_2 \equiv n$; $Q_{ij}^* \equiv Q_j^*$; $p_{ij}^* \equiv p_j^*$;

2) цены на ресурсы p_j^* не зависят от объемов факторов производства Q_j^*.

Эти два приближения являются стандартными и делают математическую модель (1) непригодной для сравнения с реальными дуопольными рынками.

Целью настоящей работы является построение вероятностной модели дуополии, лишенной указанных выше недостатков математической модели (1), а также определение в рамках этой модели стратегий рыночного поведения дуополистов, приводящих к разным формам равновесия Нэша на дуопольном рынке.

Вероятностная теория дуопольного рынка

Ключевую роль в теории дуополии играет стратегия рыночного поведения потребителей. Рассмотрим самый общий случай: покупательские возможности потребителей небезграничны, что вынуждает их стремиться к покупке товара по минимально возможной цене, т. е. у того дуополиста, который предложит наименьшую цену. Без ограничения общности можно считать, что каждый потребитель приобретает только одну единицу товара. Иными словами, индивидуальный спрос для всех потребителей равен единице. Количество потребителей, совершивших попытку купить товар на дуопольном рынке в течение некоторого промежутка времени, обозначим через N, а покупательскую способность j-го потребителя – через R_j, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Цена, по которой k-й дуополист предлагает купить товар j-му потребителю, всегда имеет следующую структуру: $p_{kj} = p_{kj}^* + \Delta p_{kj}$. Здесь $k \in \{1, 2\}$; $j \in \{1, 2, \dots, N\}$; p_{kj}^* – полные издержки k-го дуополиста, связанные с производством и подготовкой к продаже j-й единицы товара; Δp_{kj} – торговая наценка, установленная k-м дуополистом на j-ю единицу товара.

Учитывая указанную выше стратегию поведения потребителей, k-й дуополист продаст единицу товара j-му потребителю только в случае, если установленная им для этого потребителя продажная цена p_{kj} меньше, чем соответствующая цена у конкурента, и меньше, чем покупательская способность R_j данного потребителя. По этой причине количество товара, которое продаст k-й дуополист на рассматриваемом промежутке времени, составит

$$Q_k = \sum_{j=1}^{N} H\left(p_{kj} < p_{ij}\right) H\left(p_{kj} < R_j\right), \qquad (2)$$

где i, $k \in \{1, 2\}$, $i \neq k$; $H(A)$ – индикатор появления случайного события A: $H(A) = 1$, если событие A произошло, и $H(A) = 0$, если событие A не произошло. При этом k-й дуополист получит следующую прибыль:

$$Z_k = \sum_{j=1}^{N} \Delta p_{kj} H\left(p_{kj} < p_{ij}\right) H\left(p_{kj} < R_j\right). \qquad (3)$$

Поскольку N, p_{kj}^*, Δp_{kj} и R_j являются случайными величинами, количество товара Q_k, проданного k-м дуополистом, и его прибыль Z_k тоже представляют собой случайные величины. Однако, как видно из (2) и (3), Q_k и Z_k – это суммы, количество слагаемых в которых равно количеству потребителей N на дуопольном рынке. По этой причине при большом значении N реальные значения Q_k и Z_k мало отличаются от математических ожиданий этих случайных величин: $Q_k \approx \mathrm{E}(Q_k) \equiv \tilde{Q}_k$; $Z_k \approx \mathrm{E}(Z_k) \equiv \tilde{Z}_k$. Далее будем рассматривать именно такую ситуацию, оценивая количество проданного товара и прибыль дуополиста математическими ожиданиями $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$.

Для нахождения $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ предположим, что при $k \in \{1, 2\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ случайные величины N, p^*_{kj}, Δp_{kj} и R_j попарно независимы. Кроме того, будем считать, что случайные величины p^*_{kj}, Δp_{kj} и R_j имеют не зависящие от номера j потребителя плотности распределения вероятности $\varphi^*_k(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно. Это значит, что множество потребителей однородно: в нем отсутствуют группы, в пределах которых покупательские способности потребителей были бы принципиально различными. Вследствие этого оба дуополиста не делают различий между потребителями при формировании продажной цены, а исходят лишь из текущих интересов своей фирмы. При этих предположениях из (2) и (3) находим:

$$\tilde{Q}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}\psi_k^{(0)}(x)\bar{F}_i(x)\bar{F}(x)dx\,;\; \tilde{Z}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}\psi_k^{(1)}(x)\bar{F}_i(x)\bar{F}(x)dx\,, \quad (4)$$

где $\psi_k^{(m)}(x) = \int_0^x t^m \varphi^*_k(x-t)\varphi_k(t)dt$, $\tilde{N} = \mathrm{E}(N)$ – среднее число потребителей на дуопольном рынке; $\bar{F}_i(x) = \int_x^{+\infty}\psi_i^{(0)}(t)dt$ и $\bar{F}(x) = \int_x^{+\infty}\varphi(t)dt$ – дополнительные интегральные функции распределения вероятностей случайных величин p_{ij} и R_j, соответственно.

Далее рассмотрим несколько важных частных случаев дуопольного рынка.

Рынок, характеризующийся бесконечно большой покупательской способностью потребителей и равными неслучайными издержками дуополистов

Если цены на товар, установленные дуополистами, намного меньше, чем покупательская способность каждого потребителя на рынке, то в (2) и (3) можно считать, что $\forall j \in \{1, 2, \ldots, N\}$: $R_j \to +\infty$. В этом случае $\bar{F}(x) \equiv H(x \ge 0)$ и формулы (4) принимают вид

$$\tilde{Q}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}\psi_k^{(0)}(x)\bar{F}_i(x)dx\,;$$

$$\tilde{Z}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}\psi_k^{(1)}(x)\bar{F}_i(x)dx\,. \quad (5)$$

Чтобы выяснить, при каких условиях на таком дуопольном рынке наблюдаются равновесия Курно и Бертрана, так же, как и в традиционной модели (1), предположим, что полные издержки обоих дуополистов на рассматриваемом промежутке времени одинаковы и практически не подвержены случайным изменениям [1–4]. Это значит, что случайные величины p^*_{1j} и p^*_{2j} имеют одинаковое вырожденное распределение [5]:

$$\varphi^*_1(x) = \varphi^*_2(x) = \delta(x - r^*), \quad (6)$$

где $\delta(x - r^*)$ – дельта-функция Дирака, а r^* – величина полных издержек. Подстановка (6) в (5) приводит к следующим формулам для $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$:

$$\tilde{Q}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}\varphi_k(x)dx\int_x^{+\infty}\varphi_i(y)dy\,;\; \tilde{Z}_k = \tilde{N}\int_0^{+\infty}x\varphi_k(x)dx\int_x^{+\infty}\varphi_i(y)dy\,. \quad (7)$$

Из (7) следует, что среднее количество проданного товара и средняя прибыль k-го дуополиста не зависят от величины полных издержек r^*, если эти издержки одинаковы для обоих дуополистов. В этом случае $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ определяются исключительно законами распределения вероятностей торговых наценок.

Далее будем считать, что ценовая политика обоих дуополистов является осторожной: вероятность назначить ту или иную торговую наценку монотонно уменьшается с ростом величины этой наценки. Наилучшей вероятностной моделью в такой ситуации являются показательные законы распределения [5] торговых наценок:

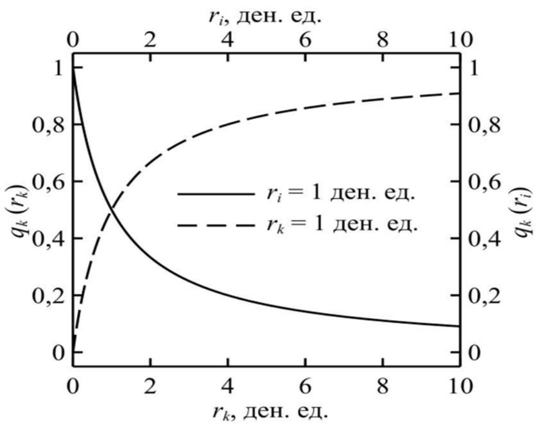
$$\varphi_k(x) = H(x \ge 0)e^{-x/r_k}/r_k\,,\; k \in \{1, 2\}\,, \quad (8)$$

где r_k – среднее значение торговой наценки, установленной k-м дуополистом. Из (7) с помощью (8) находим:

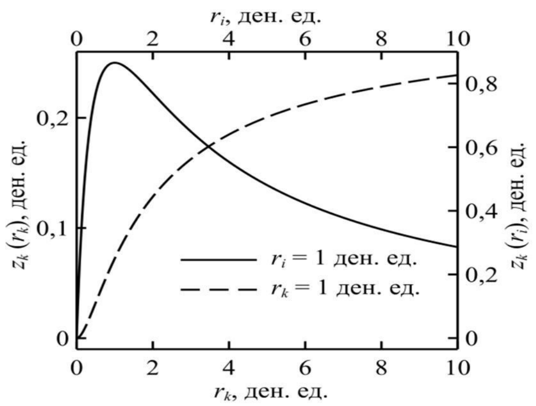
$$\tilde{Q}_k = \tilde{N}r_i/(r_k + r_i)\,;\; \tilde{Z}_k = \tilde{N}r_k r_i^2/(r_k + r_i)^2\,. \quad (9)$$

Здесь и далее при вычислении интегралов использовались таблицы [6].

Определяемые формулами (9) зависимости от r_k и r_i нормированных на $\tilde{N}$ величин $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ показаны на рис. 1.



а



б

Рис. 1. Рассчитанные по формулам (9) зависимости: *а* – удельного среднего количества товара $q_k = \tilde{Q}_k / \tilde{N}$, проданного *k*-м дуополистом; *б* – удельной средней прибыли $z_k = \tilde{Z}_k / \tilde{N}$ *k*-го дуополиста, от среднего значения r_k установленной им торговой наценки (левая и нижняя шкалы, сплошная линия) и от среднего значения r_i торговой наценки конкурента (правая и верхняя шкалы, штриховая линия)

Fig. 1. Dependencies calculated by formulas (9): *a* – specific average quantity of goods $q_k = \tilde{Q}_k / \tilde{N}$ sold by *k*-duopolist; *б* – specific average profit $z_k = \tilde{Z}_k / \tilde{N}$ of *k*-duopolist, from the average value r_k of the trade margin set by him (left and lower scales, solid line) and from the average value r_i of competitor's trade margin (right and upper scales, dashed line)

Согласно (9) и рис. 1, *б*, функциональная зависимость средней прибыли *k*-го дуополиста от среднего значения r_k установленной им торговой наценки имеет максимум при $r_k = r_i = r$. При этом $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = \tilde{N}/2$, $Z_{\max} = \tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_2 = \tilde{N}r/4$. Отсюда следует, что независимое стремление каждого дуополиста к максимуму прибыли приведет к равновесию на дуопольном рынке, при котором дуополисты поровну поделят рынок продаж товара. Это состояние равновесия является устойчивым и называется в классической экономической теории равновесием Курно. Равновесие Курно достижимо только в том случае, если каждый дуополист имеет полную информацию о ценовой политике конкурента, т. к. для обеспечения максимума прибыли дуополисты должны уравнять математические ожидания торговых наценок на товар.

Отметим, что фраза «поровну поделят рынок продаж» относится не к истинным значениям Q_1 и Q_2 количеств товара, проданного дуополистами на рассматриваемом промежутке времени, а к математическим ожиданиям этих случайных величин $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$. Равенство $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$ является точным при $r_k = r_i = r$, но при этом Q_1 лишь примерно равно Q_2

. Правда, как уже отмечалось выше (см. формулы (2), (3) и комментарии к ним), при выполнении равенства $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$ истинные значения объемов продаж Q_1 и Q_2 тем меньше отличаются друг от друга, чем больше потребителей посетит рынок на данном временном промежутке, т. е. чем больше будет $\tilde{N}$. Также следует отметить, что равенство $r_k = r_i = r$ не означает, что текущие торговые наценки у дуополистов всегда одинаковы. Текущая торговая наценка дуополиста является случайной величиной и может не совпадать с текущей торговой наценкой конкурента. Равенство $r_k = r_i = r$ означает, что колебания текущих торговых наценок у обоих дуополистов происходят вокруг одного и того же среднего значения *r*.

Если по какой-либо причине дуополисты не располагают информацией о ценовой политике друг друга, то на дуопольном рынке может установиться так называемое равновесие Бертрана. Из формул (9) следует, что при любом состоянии дуопольного рынка, в среднем, отношение прибылей дуополистов равно отношению количеств проданного ими товара и равно обратному отношению торговых наценок: $\tilde{Q}_k / \tilde{Q}_i = \tilde{Z}_k / \tilde{Z}_i = r_i / r_k$. Это значит, что уменьшение дуополистом средней торговой наценки увеличивает его прибыль и количество проданного им товара на рассматриваемом промежутке времени по сравнению с конкурентом (см. также сплошную линию на рис. 1, *а*, для которой $\tilde{Q}_k > \tilde{N}/2$ и, следовательно, $\tilde{Q}_k > \tilde{Q}_i$ при $r_k < r_i = 1$). Данная закономерность является обоснованием рыночной стратегии дуополистов, приводящей к равновесию Бертрана: ничего не зная о том, какой средней торговой наценки придерживается конкурент, дуополист снижает свою среднюю торговую наценку с целью увеличить объем продаж и прибыль по отношению к конкуренту. В результате текущие торговые наценки дуополистов, а также их прибыли стремятся к нулю и на дуопольном рынке устанавливается равновесие Бертрана. Это состояние равновесия неустойчиво, т. к. оно разрушается при появлении хотя бы у одного дуополиста информации о ценовой политике конкурента.

Рынок, характеризующийся конечной покупательской способностью потребителей и равными неслучайными издержками дуополистов

Усложним предыдущую модель дуопольного рынка, сделав ее более реалистичной: будем считать, что покупательская способность потребителей является конечной величиной, сопоставимой с рыночными ценами на товар. В этом случае для нахождения значений величин $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ необходимо использовать общие формулы (4).

Предположим, что покупательская способность потребителей, так же, как и торговые наценки дуополистов, подчиняется показательному закону распределения

$$\varphi(x) = H(x \geq 0)e^{-x/R} / R, \qquad (10)$$

где *R* – средняя покупательская способность потребителей на рассматриваемом промежутке времени. Плотность распределения вероятности (10) соответствует дуопольному рынку, на котором доминируют потребители с невысокой покупательской способностью: примерно 63 % потребителей имеют покупательскую способность меньшую или равную *R*. Вероятностное описание дуополистов оставим прежним: издержки дуополистов имеют одинаковое вырожденное распределение (6), а установленные ими торговые наценки – показательные законы распределения (8).

Подставляя (6), (8) и (10) в (4), находим:

$$\tilde{Q}_k = \tilde{N} r_i R e^{-r^*/R} / \left((r_k + r_i) R + r_k r_i \right); \; \tilde{Z}_k = \tilde{N} r_k r_i^2 R^2 e^{-r^*/R} / \left((r_k + r_i) R + r_k r_i \right)^2. \qquad (11)$$

Главным отличием формул (11) от (9) является наличие зависимости величин $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ от значения r^* издержек дуополистов, причем эта зависимость такова, что с ростом величины издержек среднее количество проданного товара и средняя прибыль дуополистов монотонно и экспоненциально быстро уменьшаются. Как видно из (11), скорость уменьшения средней прибыли и среднего объема продаж с ростом издержек тем больше, чем меньше средняя покупательская способность *R* потребителей. Таким образом, из (11) следует, что на данном дуопольном рынке оба дуополиста должны следить за тем, чтобы отношение их издержек к средней покупательской способности потребителей было как можно меньшим. В противном случае при больших значениях отношения r^*/R, из-за наличия экспоненциального множителя $e^{-r^*/R}$ в (11), средние объемы продаж и средние прибыли дуополистов могут оказаться настолько маленькими, что сделают производство и продажу товара нерентабельными.

Из (11) также следует, что характер зависимости величин $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Z}_k$ от r_k при фиксированных r_i, *R* и от r_i при фиксированных r_k, *R* ничем не отличается от характера аналогичных зависимостей, определяемых формулами (9), и может быть представлен графиками, подобными приведенным на рис. 1. В частности, из (11) видно, что средняя прибыль *k*-го дуополиста как функция среднего значения r_k установленной им торговой наценки имеет максимум при $r_k = r_i R / \left(r_i + R\right)$ и в этой точке максимума: $\tilde{Q}_k^{(\max)} = \tilde{N} e^{-r^*/R} / 2$; $\tilde{Z}_k^{(\max)} = \dfrac{\tilde{N}}{4} r_i R e^{-r^*/R} / \left(r_i + R\right)$. Однако в отличие от дуопольного рынка с неограниченной покупательской способностью независимое стремление дуополистов к максимуму прибыли теперь не приводит к равновесию Курно, а заканчивается равновесием Бертрана. Действительно, максимум прибыли k-го дуополиста наблюдается при $r_k = r_i R / \left(r_i + R\right) < r_i$. Следовательно, стремясь к максимуму своей прибыли, k-й дуополист устанавливает такие текущие торговые наценки, при которых их среднее значение r_k становится меньше, чем среднее значение r_i торговой наценки у конкурента. Если конкурент тоже стремится максимизировать свою прибыль, он будет проводить в точности такую же ценовую политику. В результате возникнет так называемая «война цен»: конкурирующие фирмы делают свои текущие и средние торговые наценки все меньше и меньше из-за желания получить максимально возможную прибыль, что (см. (11)) делает все меньше и меньше их прибыль. В результате оба дуополиста разорятся и на дуопольном рынке установится равновесие Бертрана.

Таким образом, на дуопольном рынке с конечной покупательской способностью потребителей стремление к максимуму прибыли на некотором промежутке времени не является хорошей стратегией рыночного поведения дуополистов, т. к. она приводит к «войне цен» и равновесию Бертрана. Лучшей стратегией является такая, которая приводит к равновесию Курно. Из (11) видно, что на дуопольном рынке, характеризующемся конечной покупательской способностью потребителей, равновесие Курно устанавливается только в том случае, когда равны математические ожидания торговых наценок дуополистов: $r_k = r_i = r$. В этом случае дуополисты поровну делят рынок продаж товара и получают равные, хотя и не максимально возможные прибыли:

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = \tilde{N} R e^{-r^*/R} / \left(2R + r\right); \; \tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_2 = \tilde{N} r R^2 e^{-r^*/R} / \left(2R + r\right)^2 . \tag{12}$$

Прибыль, получаемую дуополистами в состоянии равновесия Курно, можно максимизировать. Из формул (12) следует, что $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ как функции r имеют максимум при $r = 2R$. Следовательно, если средние значения торговых наценок, устанавливаемых дуополистами, совпадают и равны удвоенной средней покупательской способности потребителей, то дуопольный рынок оказывается в состоянии равновесия Курно с максимально возможной для этого равновесия прибылью.

Рынок, характеризующийся конечной покупательской способностью потребителей и случайными издержками дуополистов

Для того чтобы сделать вероятностную модель дуопольного рынка еще более реалистичной, откажемся от предположения (6) и будем считать, что благодаря изменчивости рыночной конъюнктуры издержки дуополистов p_{1j}^* и p_{2j}^* с течением времени могут случайным образом изменяться. Описывать эти случайные изменения будем с помощью показательных законов распределения

$$\varphi_k^*\left(x\right) = H\left(x \ge 0\right) e^{-x/r_k^*} / r_k^*, \; k \in \{1, 2\}, \tag{13}$$

где r_k^* – математическое ожидание полных издержек k-го дуополиста. Законы распределения (13) соответствуют такому рынку, на котором оба дуополиста постоянно стремятся минимизировать свои издержки, имея принципиальную возможность свести их к нулю.

Вероятностное описание покупательской способности потребителей и торговых наценок, установленных дуополистами, оставим таким же, как и в предыдущей модели дуопольного рынка (см. формулы (10) и (8)). При этих предположениях, с помощью общих формул (4), находим:

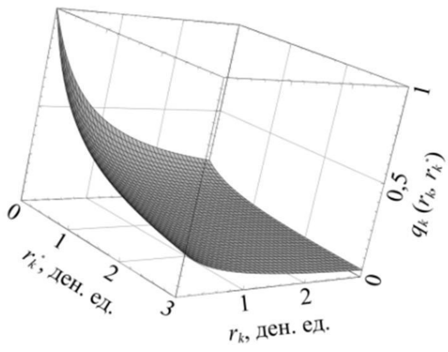
$$\tilde{Q}_k = \tilde{N} f\left(1/r_k, 1/r_k^*, 1/r_i, 1/r_i^*, 1/R\right) / \left(r_k r_k^*\right); \tag{14}$$

$$\tilde{Z}_k = \tilde{N}\left(f\left(1/r_k, 1/r_k, 1/r_i, 1/r_i^*, 1/R\right) - f\left(1/r_k, 1/r_k^*, 1/r_i, 1/r_i^*, 1/R\right)\right) / \left(r_k - r_k^*\right), \tag{15}$$

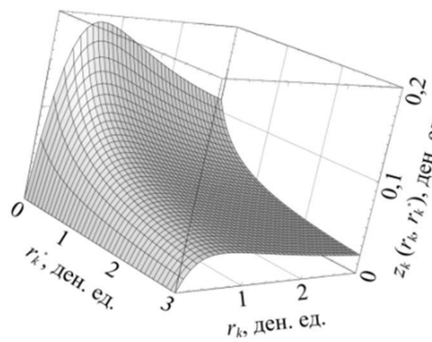
где $f\left(x, y, z, w, v\right) = \dfrac{\left(x + z + w + v\right)\left(y + z + w + v\right) - zw}{\left(x + z + v\right)\left(y + z + v\right)\left(x + w + v\right)\left(y + w + v\right)}$.

Из (14) и (15) следует, что k-й дуополист может управлять средними значениями своей прибыли $\tilde{Z}_k$ и количества проданного товара $\tilde{Q}_k$ с помощью параметров r_k (среднее значение торговой наценки) и r_k^* (средние полные издержки). Поэтому все возможные стратегии рыночного поведения k-го дуополиста, оптимальные для него в том или ином смысле, заключены в функциональных зависимостях величин $\tilde{Z}_k$ и $\tilde{Q}_k$ от двух переменных:

r_k и r_k^*. Графические изображения типичных зависимостей $\tilde{Z}_k$ и $\tilde{Q}_k$ от r_k и r_k^*, определяемых формулами (14) и (15), представлены на рис. 2.



а



б

Рис. 2. Рассчитанные по формулам (14), (15) зависимости:
а – удельного среднего количества товара $q_k = \tilde{Q}_k / \tilde{N}$, проданного *k*-м дуополистом;
б – удельной средней прибыли $z_k = \tilde{Z}_k / \tilde{N}$ *k*-го дуополиста от двух переменных:
среднего значения r_k установленной им торговой наценки и от среднего значения r_k^*
понесенных им полных издержек. Расчеты проводились в предположении, что $r_i = r_i^* = R = 1$ ден. ед.

Fig. 2. Dependencies calculated by formulas (14), (15):
a – specific average quantity of goods $q_k = \tilde{Q}_k / \tilde{N}$ sold by *k*-duopolist; *б* – specific average profit $z_k = \tilde{Z}_k / \tilde{N}$ of *k*-duopolist, from two variables: from the average value of a trade margin established by him and from the average value of their full costs.
The calculations were carried out under the assumption that $r_i = r_i^* = R = 1$ currency unit

Согласно рис. 2 количество товара $\tilde{Q}_k$, проданного *k*-м дуополистом на рассматриваемом промежутке времени, монотонно уменьшается с ростом как r_k, так и r_k^*. В то же время прибыль $\tilde{Z}_k$, полученная *k*-м дуополистом за тот же промежуток времени, как функция r_k, имеет максимум при любом фиксированном r_k^* и монотонно убывает с ростом r_k^* при фиксированном значении r_k. Рис. 2 показывает, что максимально возможную прибыль *k*-й дуополист получит только при равном нулю математическом ожидании полных издержек: $r_k^* = 0$ и при некотором ненулевом значении средней торговой наценки r_k. Определить аналитически в общем виде это значение r_k из формулы (15) при произвольных r_i, r_i^*, R не представляется возможным, т. к. на r_k возникает алгебраическое уравнение высокой степени. Однако при конкретных числовых значениях параметров r_i, r_i^*, R положение максимума прибыли $\tilde{Z}_k$ уже может быть найдено с помощью формулы (15) либо аналитически, либо численно. В частности, для тех значений этих параметров, при которых были построены поверхности на рис. 2: $r_i = r_i^* = R = 1$ ден. ед., максимум $\tilde{Z}_k$, соответствующий нулевому математическому ожиданию полных издержек $(r_k^* = 0)$, находится при $r_k = \left(1+\sqrt{3}\right)/4 \approx 0{,}68$ ден. ед. и в этом максимуме: $\tilde{Q}_k^{(\max)} = \tilde{N}\left(5-\sqrt{3}\right)/6 \approx 0{,}54\tilde{N}$; $\tilde{Z}_k^{(\max)} = \dfrac{\tilde{N}}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}19\tilde{N}$ ден. ед. Обратим внимание, что в этом случае средняя торговая наценка k-го дуополиста, при которой наблюдается максимум его прибыли, $r_k \approx 0{,}68$ ден. ед., меньше, чем средняя торговая наценка, установленная его конкурентом: $r_i = 1$ ден. ед. Можно показать, что это свойство сохраняется и при других значениях параметров r_i, r_i^*, R и r_k^*. Это значит, что одновременное стремление обоих дуополистов к максимуму прибыли неизбежно приведет к «войне цен» и равновесию Бертрана на дуопольном рынке: чтобы постоянно получать максимально возможную прибыль, каждый дуополист должен устанавливать такие цены на свой товар, среднее значение которых меньше среднего значения цен конкурента. Динамика этого процесса такова, что со временем торговые наценки обоих дуополистов будут стремиться к нулю, а вместе с ними, как это следует из формул (14), (15), к нулю будут стремиться их прибыли и количество проданного ими товара.

В качестве альтернативы стремлению к максимуму прибыли, ведущему к разорению дуополистов, рассмотрим состояние равновесия Курно, при котором количество товара, проданного дуополистами на рассматриваемом промежутке времени, одинаково: $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$. Если средние полные издержки дуополистов равны: $r_k^* = r_i^* = r^*$, то, как и в случае вероятностной модели (11), из формулы (14) следует, что равенство $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$ возможно лишь при условии $r_k = r_i = r$. Это значит, что для уравнивания объемов продаж дуополистам необходимо сделать одинаковыми средние значения своих торговых наценок. В этом случае вероятностная модель (14), (15) принимает вид

$$\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = \frac{\tilde{N}R^2\left(r^*r + 2\left(r^*+r\right)R\right)}{\left(r^*+2R\right)\left(r+2R\right)\left(rR + r^*\left(r+R\right)\right)}; \tag{16}$$

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_2 = \frac{\tilde{N}rR^3\left(2r^2R^2 + \left(r^*\right)^2\left(r+2R\right)^2 + r^*rR\left(3r+4R\right)\right)}{\left(r^*+2R\right)\left(r+2R\right)^2\left(rR + r^*\left(r+R\right)\right)^2}. \tag{17}$$

Равновесие Курно (16), (17) на дуопольном рынке является устойчивым, поскольку дуополисты не только делят поровну рынок продаж, но и получают при этом одинаковую прибыль. Эта прибыль, так же как и в случае модели (12), может быть максимизирована: для заданных r^* и R всегда существует такое значение средней торговой наценки r, при котором прибыль, определяемая формулой (17), имеет максимум. Как показывают вычисления, среднее значение торговой наценки, максимизирующее прибыль (17), удовлетворяет алгебраическому уравнению 4-й степени, которое легко может быть решено численно, а в некоторых случаях и аналитически, при конкретных значениях r^* и R. Например, при $r^* = R = 1$ ден. ед. максимум прибыли (17) наблюдается при $r \approx 1{,}365$ ден. ед. и равен $\tilde{Z}_1^{(\max)} = \tilde{Z}_2^{(\max)} \approx 0{,}075\tilde{N}$ ден. ед.

В отличие от вероятностной модели (11), в которой дуополисты изначально характеризовались равными издержками, вероятностная модель (14), (15) позволяет поставить вопрос о достижении равновесия Курно на дуопольном рынке при условии, что средние полные издержки дуополистов различны: $r_k^* \neq r_i^*$. Анализ формулы (14) показывает, что уравнение $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$ всегда имеет решение в области $r_k \geq 0$, если выполняется неравенство $r_k^* < r_i^*$. Если справедливо противоположное неравенство, $r_k^* \geq r_i^*$, то значение r_k, при котором $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$, существует лишь при $r_i \geq Rr_k^*\left(r_k^* - r_i^*\right)/\left(r_k^*r_i^* + R\left(r_k^* + r_i^*\right)\right)$. Таким образом, когда полные издержки k-го дуополиста в среднем больше, чем у конкурента, k-й дуополист может добиться равенства объемов продаж с конкурентом только при условии, что средняя торговая наценка конкурента будет не меньше величины $Rr_k^*\left(r_k^* - r_i^*\right)/\left(r_k^*r_i^* + R\left(r_k^* + r_i^*\right)\right)$. В противном случае равновесие Курно на дуопольном рынке не будет достигнуто ни при каких значениях средней торговой наценки r_k k-го дуополиста.

Общий вид функциональной зависимости r_k от r_i, следующий из (14) и равенства $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$, очень сложен. Однако, как показывают численные эксперименты, истинная зависимость r_k от r_i, приводящая к равновесию Курно, при любых r_i практически не отличается от своей асимптотики:

$$r_k \approx \frac{R+r_i^*}{R+r_k^*} r_i + \frac{R\left(r_i^*-r_k^*\right)\left(R^2 r_i^*\left(2R+r_i^*\right)+R r_k^*\left(2R+r_i^*\right)\left(R+2r_i^*\right)+\left(R+r_i^*\right)^2\left(r_k^*\right)^2\right)}{\left(R+r_i^*\right)\left(R+r_k^*\right)^2\left(r_k^* r_i^*+R\left(r_k^*+r_i^*\right)\right)}, \quad r_i \to \infty. \quad (18)$$

Чтобы удерживать рынок в состоянии, близком к равновесию Курно, *k*-й дуополист должен постоянно отслеживать изменения среднего значения торговой наценки r_i конкурента и устанавливать среднее значение своей торговой наценки r_k в соответствии с формулой (18). Как видно из (18), это можно выполнить, только если *k*-й дуополист обладает точными для дуопольного рынка, на котором он продает товар, оценками всех параметров вероятностной модели (14), (15): r_k^*, r_i^*, *R*. Таким образом, процесс достижения равновесия Курно, в основе которого лежит формула (18), является сложным и не всегда реализуемым.

Однако существует и другой способ достигнуть равновесия Курно на дуопольном рынке при $r_k^* \neq r_i^*$. Из формулы (14) следует, что равенство объемов продаж возникает, если каждый дуополист устанавливает среднее значение своей торговой наценки равным среднему значению суммарных издержек конкурента: $r_i = r_k^*, r_k = r_i^*$. При этом равенство $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$ выполняется без каких-либо дополнительных ограничений на средние значения торговых наценок дуополистов. Такая стратегия рыночного поведения дуополистов значительно проще стратегии, определяемой формулой (18). В частности, для ее реализации дуополистам не требуется знание средней покупательской способности потребителей *R*.

Если равновесие Курно на дуопольном рынке при $r_k^* \neq r_i^*$ установилось в результате картельного сговора, т. е в результате прямой договоренности между дуополистами относительно средних значений устанавливаемых ими торговых наценок, то это равновесие будет устойчивым, т. к. в этом случае оба дуополиста заинтересованы в поддержании на рынке состояния $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$. Однако, если равновесие Курно на дуопольном рынке при $r_k^* \neq r_i^*$ возникло в результате действия чисто рыночных механизмов, оно может оказаться неустойчивым. Причина состоит в том, что несмотря на равенство $\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_k$ прибыли дуополистов в среднем являются неодинаковыми: средняя прибыль всегда больше у того дуополиста, у которого средние полные издержки меньше (см. формулу (15)). Дуополист, получающий меньшую прибыль при равных объемах продаж, возможно, будет стремиться исправить эту ситуацию. Сделать это, не нарушая равновесие Курно на дуопольном рынке, он сможет лишь путем уменьшения среднего значения своих полных издержек до уровня средних полных издержек конкурента. Если такая возможность существует, то через некоторое время на дуопольном рынке установится устойчивое равновесие Курно (16), (17). Если дуополист, понесший наибольшие издержки, не может уменьшить их среднее значение, но при этом стремится увеличить свою прибыль, то он будет вынужден отказаться от стратегии поведения на дуопольном рынке, приводящей к равновесию Курно.

На дуопольном рынке, описываемом вероятностной моделью (14), (15), помимо равновесия Бертрана и равновесия Курно возможны и другие виды равновесных состояний. Одним из таких видов равновесия является такое состояние рынка, при котором прибыли дуополистов одинаковы: $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$. В вероятностных моделях (9) и (11) равенство $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ является еще одной формой записи условия возникновения равновесия Курно, поскольку в этих моделях из равенства прибылей следует равенство объемов продаж. Однако в модели (14), (15) при $r_k^* \neq r_i^*$ одинаковым прибылям соответствуют разные количества проданного товара и, следовательно, равенство $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ определяет новый вид равновесия, отличный от равновесия Курно. Возникновение на дуопольном рынке равновесия вида $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ означает отказ дуополистов вести борьбу друг с другом за получение прибыли большей, чем у конкурента. Для достижения этого равновесия необходимо, чтобы оба дуополиста придерживались одной и той же стратегии рыночного поведения, направленной на выравнивание их прибылей. Проще всего это реализуется в результате картельного сговора: дуополисты, опираясь на текущие рыночные значения параметров r_k^*, r_i^* и *R*, напрямую согласовывают и устанавливают такие торговые наценки на товар, при которых прибыли $\tilde{Z}_i$, $\tilde{Z}_k$, определяемые формулой (15), равны.

В качестве примера, иллюстрирующего возможность установления равновесия $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$, рассмотрим дуопольный рынок, для которого $r_k^* = 3r_i^*$, $r_i^* = 1$ ден. ед., *R* = 2 ден. ед. В этом случае результаты численного решения уравнения $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$, найденные с помощью формулы (15), оказываются следующими:

1. При $0 < r_i < 0{,}0574$ ден. ед. существуют два средних значения торговой наценки *k*-го дуополиста, обеспечивающих равенство прибылей дуополистов. Оба этих значения являются корнями алгебраического уравнения 4-й степени и легко могут быть найдены при любом конкретном значении средней торговой наценки r_i конкурента. Например, при $r_i = 0{,}04$ ден. ед. равновесие $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ достигается при $r_k^{(1)} \approx 0{,}186$ ден. ед., $\tilde{Z}_k^{(1)} = \tilde{Z}_i^{(1)} \approx 0{,}022\tilde{N}$ ден. ед. и $r_k^{(2)} \approx 1{,}901$ ден. ед., $\tilde{Z}_k^{(2)} = \tilde{Z}_i^{(2)} \approx 0{,}024\tilde{N}$ ден. ед. Как видим, *k*-му дуополисту выгоднее установить более высокую среднюю торговую наценку на свой товар, т. к. при этом прибыль дуополистов будет больше.

2. При $r_i = 0{,}0574$ ден. ед. равновесие $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ достигается, только если $r_k \approx 0{,}59$ ден. ед. Прибыль дуополистов в этом случае равна $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k \approx 0{,}032\tilde{N}$ ден. ед. и является наибольшей в области $0 < r_i \le 0{,}0574$ ден. ед.

3. Если $r_i > 5{,}31$ ден. ед., то равенство прибылей дуополистов опять возможно при двух средних значениях торговой наценки *k*-го дуополиста, которые являются корнями алгебраического уравнения 4-й степени. Например, при $r_i = 6$ ден. ед. равновесие $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ возникает при $r_k^{(1)} \approx 0{,}516$ ден. ед., $\tilde{Z}_k^{(1)} = \tilde{Z}_i^{(1)} \approx 0{,}108\tilde{N}$ ден. ед. и $r_k^{(2)} \approx 1{,}735$ ден. ед., $\tilde{Z}_k^{(2)} = \tilde{Z}_i^{(2)} \approx 0{,}144\tilde{N}$ ден. ед.

4. Если $r_i = 5{,}31$ ден. ед., то равенство $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ возможно только при $r_k \approx 0{,}93$ ден. ед. Прибыль дуополистов при этих значениях r_i и r_k составляет $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k \approx 0{,}132\tilde{N}$ ден. ед. и не является наибольшей в области $r_i \ge 5{,}31$ ден. ед. В этой области прибыль дуополистов будет максимально возможной, если решением уравнения $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$ является точка $r_i \approx 6{,}4$ ден. ед., $r_k \approx 2{,}03$ ден. ед., в которой $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k \approx 0{,}145\tilde{N}$ ден. ед. В рассматриваемом числовом примере эта точка является наилучшим решением задачи о равенстве прибылей, т. к. обеспечивает дуополистам наибольшую прибыль среди всех возможных пар значений r_i и r_k.

5. В области $0{,}0574 < r_i < 5{,}31$ ден. ед. состояние равновесия, при котором прибыли дуополистов равны, невозможно.

Отметим, что картельный сговор как механизм, приводящий к равновесию Курно или к состоянию равновесия вида $\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_k$, всегда относится к средним значениям торговых наценок, устанавливаемых дуополистами. Текущие рыночные значения этих торговых наценок случайным образом меняются вокруг согласованных дуополистами средних значений. По этой причине обнаружить на дуопольном рынке картельный сговор практически невозможно.

Заключение

Наиболее важным результатом данной работы является вероятностная модель дуопольного рынка, существо которой выражено в формулах (4). Эта модель, в отличие от (1), позволяет количественно описывать реальные дуопольные рынки, а также определять условия, при которых на этих рынках возникают состояния равновесия, например состояния равновесия Курно и Бертрана. Для реализации этой возможности необходимо в ходе статистического исследования определить свойственные исследуемому дуопольному рынку плотности распределения вероятностей $\varphi_k^*(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\varphi(x)$ $(k \in \{1,2\})$ издержек, торговых наценок и покупательской способности, а затем подставить их в формулы (4). В результате получатся присущие рынку полуэмпирические зависимости математических ожиданий реальных объемов продаж и прибылей дуополистов от параметров функций $\varphi_k^*(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\varphi(x)$. Найденные таким образом полуэмпирические зависимости (4) позволят конкурирующим фирмам, целенаправленно манипулируя параметрами плотностей распределения вероятностей $\varphi_k^*(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\varphi(x)$, эффективно управлять дуопольным рынком, приводя его в состояние равновесия, устраивающее как сами фирмы, так и потребителей.

Список источников

1. Дудов С. И., Выгодчикова И. Ю., Купцов С. Н. Математические методы в экономике: учеб. пособие. Саратов: Наука, 2014. 93 с.
2. Friedman J. W. Oligopoly and the Theory of Games. Amsterdam: North-Holland, 1979. 311 p.
3. Okuguchi K. Equilibrium Prices in the Bertrand and Cournot Oligopolies // Journal of Economic Theory. 1987. V. 42. Iss. 1. P. 128–139.
4. Yu Yu, Weisheng Yu. The stability and duality of dynamic Cournot and Bertrand duopoly model with comprehensive preference // Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 395. 19 p.
5. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороходов А. В. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

References

1. Dudov S. I., Vygodchikova I. Iu., Kuptsov S. N. *Matematicheskie metody v ekonomike: uchebnoe posobie* [Mathematical methods in economics: teaching aids]. Saratov, Nauka Publ., 2014. 93 p.

2. Friedman J. W. *Oligopoly and the Theory of Games*. Amsterdam, North-Holland, 1979. 311 p.

3. Okuguchi K. Equilibrium Prices in the Bertrand and Cournot Oligopolies. *Journal of Economic Theory*, 1987, vol. 42, iss. 1, pp. 128-139.

4. Yu Yu, Weisheng Yu. The stability and duality of dynamic Cournot and Bertrand duopoly model with comprehensive preference. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, vol. 395, 19 p.

5. Koroliuk V. S., Portenko N. I., Skorokhodov A. V. i dr. *Spravochnik po teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistike* [Reference book on probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 640 p.

6. Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I. *Integraly i riady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

Статья поступила в редакцию 06.10.2022; одобрена после рецензирования 10.10.2022; принята к публикации 15.10.2022
The article is submitted 06.10.2022; approved after reviewing 10.10.2022; accepted for publication 15.10.2022

Информация об авторе / Information about the author

Андрей Вячеславович Михеев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики; Казанский национальный исследовательский технологический университет; veehima@gmail.com

Andrej V. Mikheev – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics; Kazan National Research Technological University; veehima@gmail.com