

А. В. Синельщиков, Н. Н. Панасенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ КОРАБЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Расчетный анализ корабельных, крановых и других машиностроительных конструкций, состоящих из тонкостенных стержней замкнутого профиля, на основе теории тонкостенных сварных и горячекатаных стержней, до настоящего времени остается предметом исследований. Приведены теоретические основы построения математической модели тонкостенного стержня замкнутого профиля в местной системе координат при пространственном деформировании с учетом сдвига срединной поверхности. Получены математические соотношения для построения матрицы жесткости тонкостенного пространственного стержня замкнутого профиля, которая может быть использована при статическом и динамическом расчетном анализе корабельных конструкций методом конечных элементов.

Ключевые слова: корпус судна, пространственный тонкостенный стержень замкнутого профиля, матрица жесткости, математическая модель, метод конечных элементов.

Введение

Корпус судна проектировщики ранее считали абсолютно жестким, недеформируемым телом. В теории корабля интерес представляла только внешняя форма обводов корпуса, соответственно, изучалось влияние этой формы на отдельные мореходные качества.

В настоящее время в строительной механике корабля [1] корпус плавающего судна рассматривается как тонкостенная балка переменного по длине коробчатого сечения (рис. 1, *a*).

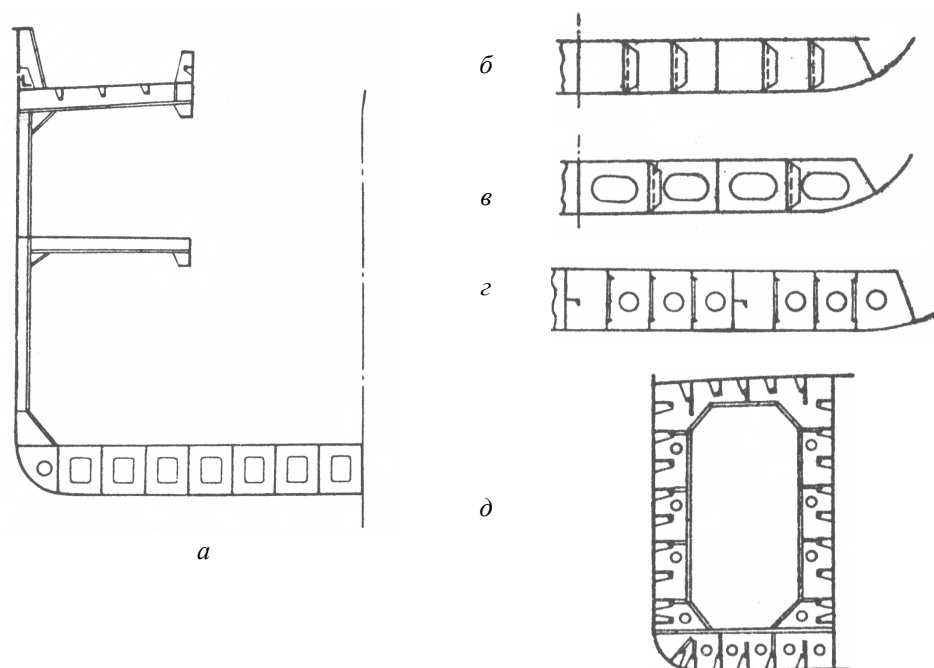


Рис. 1. Тонкостенные элементы корабельных конструкций замкнутого профиля: тонкостенная балка по длине судна коробчатого сечения (*a*); днищевые перекрытия из коробчатых балок поперечной системы набора (*b*, *в*); продольной системы набора (*г*); коробчатое сечение корпуса танкера по бортовому отсеку (*д*)

Под действием совокупности внешних и внутренних сил различной природы эта балка деформируется, в ее элементах возникают нормальные и касательные напряжения, следователь-

но, она должна обладать достаточной прочностью, которую можно определить как несущую способность корпуса воспринимать, не разрушаясь, нагрузки, возникающие в процессе эксплуатации судна. Корпус должен обладать и достаточной жесткостью, т. е. его деформации должны быть относительно невелики и не оказывать влияния на мореходные качества судна. Обеспечение прочности и жесткости корпуса при наименьшей затрате материала – одна из основных задач, решаемых при строительстве судна.

Кроме корпуса судна, как тонкостенной балки коробчатого сечения, отдельные элементы корпуса – перекрытия – представляют собой близкие к плоскостным конструкции, составленные листами обшивки и балками набора. Участки обшивки, опирающиеся на балки, имеют коробчатую прямоугольную форму. Кроме того, поперечные и продольные системы набора днищевых перекрытий (рис. 1, б–г) представляют собой тонкостенные стержни замкнутого профиля. Особенно часто замкнутые профили применяются для поперечных сечений корпусов танкеров по бортовому отсеку (рис. 1, д).

Следует отметить, что основным этапом расчета сложных пространственных машиностроительных конструкций произвольного вида, составленных из тонкостенных стержней замкнутого профиля методом конечных элементов в перемещениях, является формирование матриц жесткости и масс отдельного стержня, находящегося в условиях пространственного деформирования в местной системе координат (МСК).

Математическая модель тонкостенного стержня замкнутого профиля

Следуя методике, изложенной в [2], посвященной стержням открытого профиля, получим матрицу жесткости тонкостенного стержня замкнутого профиля. Положительные направления узловых перемещений и усилий в стержне указаны на рис. 2, согласно которому компоненты вектора перемещений (по узлам j и k) примут вид

$$\{v\}^{jk} = \begin{Bmatrix} (\xi_H \ \eta_H \ \zeta_H \ \Theta_{xH} \ \Theta_{yH} \ \Theta_{zH} \ \Theta'_{zH})^j \\ (\xi_K \ \eta_K \ \zeta_K \ \Theta_{xK} \ \Theta_{yK} \ \Theta_{zK} \ \Theta'_{zK})^k \end{Bmatrix}^T. \quad (1)$$

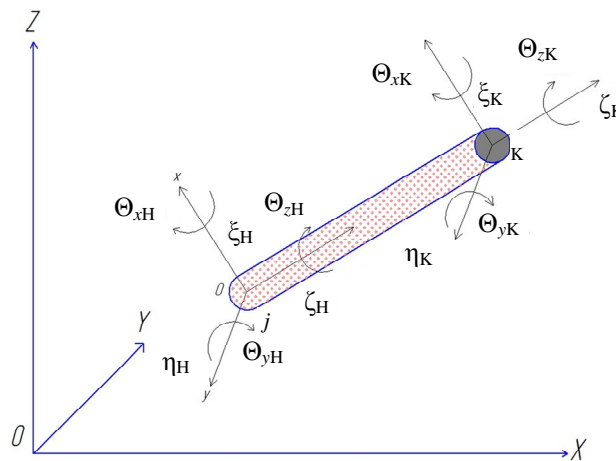


Рис. 2. Правило знаков для узловых перемещений тонкостенного стержня замкнутого профиля

В (1) ξ, η, ζ – линейные перемещения узла; $\Theta_{x(y,z)}$ – углы поворота; Θ'_z – производная от угла закручивания Θ_z (депланация); подстрочные индексы x, y и z обозначают оси МСК; надстрочные индексы j и k указывают на начало (н) и конец (к) стержневого конечного элемента (КЭ); T – индекс транспонирования матриц и векторов.

Вектору перемещений (1) соответствует вектор внутренних усилий в дискретных граничных узлах j и k :

$$\{Q\}^{jk} = \left\{ (Q_x Q_y N_z M_x M_y M_z B)^j (Q_x Q_y N_z M_x M_y M_z B)^k \right\}^T, \quad (2)$$

где $Q_{x(y)}$ и N_z – внутренние поперечные и продольная силы; $M_{x(y)}$ и M_z – изгибающие и крутящий момент; B – изгибно-крутящий бимомент. Правила знаков для внутренних усилий (2) аналогичны правилу знаков для узловых перемещений КЭ (1).

Стержень считаем элементом с четырнадцатью степенями свободы, пространственное положение которого определяется вектором обобщенных координат (1).

Значения элементов искомой матрицы жесткости $[K]_{14 \times 14}^{jk}$ при прочностном расчете зависят от жесткостных параметров КЭ и принятого закона изменения компонентов перемещений, в качестве которых примем аппроксимирующие функции Эрмита [3, 4]:

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 1, 5, 8, 12; \\ \eta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 2, 4, 9, 11; \\ \zeta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 3, 10; \\ \Theta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 6, 7, 13, 14. \end{aligned} \quad (3)$$

В выражениях (3) q_s – узловое перемещение, соответствующее вектору (1); $\psi_s(z)$ – аппроксимирующие функции Эрмита, которые для тонкостенного стержня замкнутого профиля с двумя осями симметрии, жестко защемленного по концам, с учетом сдвига срединной поверхности принимают вид [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{2,x}(z) = \psi_{1,y}(z) = \psi_{6,\omega}(z) &= 1 - 2 \frac{K_{ii} EJ_i}{K_i l GA} z - \frac{1}{4K_i} z^2 + \frac{1}{6K_i l} z^3; \\ \psi_{4,x}(z) = \psi_{5,y}(z) = -\psi_{7,\omega}(z) &= \left(1 - \frac{K_{ii} EJ_i}{K_i 2GA}\right) z - \left(1 + \frac{l^2}{4K_i}\right) \frac{z^3}{2l} + \frac{1}{12K_i} z^3; \\ \psi_{9,x}(z) = \psi_{8,y}(z) = \psi_{13,\omega}(z) &= \frac{K_{ii} EJ_i}{GA K_i l} z + \frac{1}{4K_i} z^2 - \frac{1}{6K_i l} z^3; \\ \psi_{11,x}(z) = \psi_{12,y}(z) = \psi_{14,\omega}(z) &= \frac{K_{ii} EJ_i}{GA 2K_i} z + \left(\frac{l}{8K_i} - \frac{1}{2l}\right) z^2 - \frac{1}{12K_i} z^3; \\ \psi_{3,z}(z) &= 1 - z/l; \quad \psi_{10,z}(z) = z/l; \end{aligned} \quad (4)$$

$$K_i = \frac{l^2}{12} + K_{ii} \frac{EJ_i}{GA}, \quad \text{где } i = x, y, \omega. \quad (5)$$

При выводе выражений (4) использовались результаты работы [5], согласно которой функции $\psi_{6,i}(z)$, $\psi_{7,i}(z)$, $\psi_{13,i}(z)$, $\psi_{14,i}(z)$, где $i = x, y, \omega$, являются приближенными. Кроме того, поскольку функции в (4) получены для тонкостенного стержня открытого профиля [6], для тонкостенного стержня замкнутого профиля в (4) и (5) необходимо произвести замену

$$K_{xx} = \mu_{xx}; \quad K_{yy} = \mu_{yy}; \quad K_{\omega\omega} = \frac{\mu_{\omega\omega}}{r^2}. \quad (6)$$

Таким образом, матрица жесткости $[K]_{14 \times 14}^{jk}$ для пространственного тонкостенного стержня замкнутого профиля имеет размер 14×14 . Чтобы построить элементы этой матрицы, воспользуемся вариационными принципами, для чего будем следовать методике, изложенной в работе [7]. Выпишем формулы для нормальных и касательных напряжений в стержне

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{B}{J_{\bar{\omega}}} \bar{\omega}; \quad (7)$$

$$\tau = \frac{M_z}{\omega_k \delta} - \frac{Q_y \bar{S}_{ox}}{J_x \delta} - \frac{Q_x \bar{S}_{oy}}{J_y \delta} - \frac{M_{\bar{\omega}} \bar{S}_{o\bar{\omega}}}{J_{\bar{\omega}} \delta}, \quad (8)$$

причем в (8) полный крутящий момент M_z будем определять как сумму

$$M_z = H + M_{\bar{\omega}}, \quad (9)$$

в которой момент чистого кручения H выражается через угол закручивания Θ формулой

$$H = GJ_z \frac{d\theta}{dz} = GJ_z \theta', \quad (10)$$

а бимомент B в (7) и момент стесненного кручения $M_{\bar{\omega}}$ в (8), согласно полусдвиговой теории А. А. Уманского [8], связываются с мерой деформации β

$$\beta = \frac{1}{\mu} \left(\theta' - \frac{M_z}{GJ_p} \right) \quad (11)$$

соотношениями

$$\begin{aligned} B &= -EJ_{\bar{\omega}} \beta'; \\ M_{\bar{\omega}} &= -EJ_{\bar{\omega}} \beta'' + m_{B(z)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того, в (11)

$$\mu = 1 - (J_z / J_p),$$

μ – коэффициента деформации; $m_{B(z)}$ – распределенная бимоментная нагрузка, зависящая от координаты z ; J_p – направленный момент инерции сечения (рис. 3), определяемый по формуле

$$J_p = \oint r^2 \delta ds; \quad (13)$$

J_z – крутильный момент инерции сечения стержня однозамкнутого профиля, принимается, как в формуле (10):

$$J_z = \omega_k^2 / \oint \frac{ds}{\delta}, \quad (14)$$

где $\omega_k = \oint r ds$ – удвоенная площадь, охватываемая срединной линией поперечного сечения стержня (рис. 3).

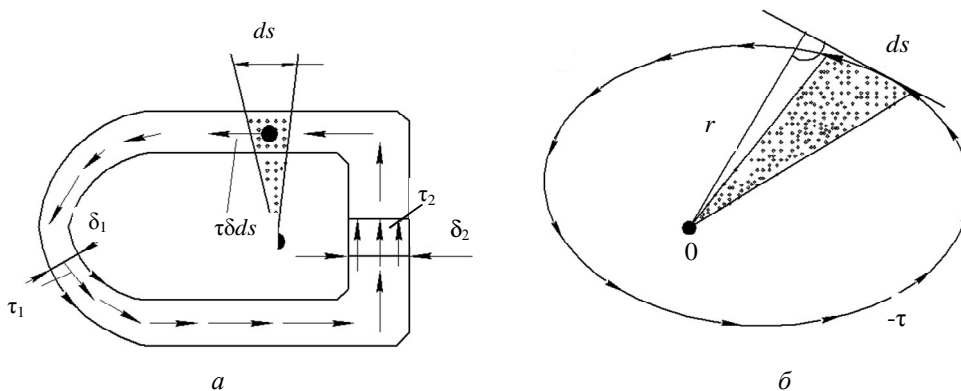


Рис. 3. Распределение касательных напряжений в тонкостенных стержнях замкнутого профиля при свободном кручении: общий вид обобщенного профиля (а); замкнутый силовой многоугольник погонного касательного усилия (б)

Дополнительно укажем, что $J_{\bar{\omega}}$ в (7), (8) и (12) – секториальный момент инерции сечения стержня замкнутого профиля, который имеет вид

$$J_{\bar{\omega}} = \oint \bar{\omega}^2 \delta ds ,$$

где δ , как и ранее, – толщина контура поперечного сечения тонкостенного стержня; $\bar{\omega}$ определяется по формуле

$$\bar{\omega} = \omega_0 - \alpha(s) . \tag{15}$$

Введенная формулой (15) функция дуговой координаты $\bar{\omega} = \bar{\omega}(s)$ называется обобщенной секториальной координатой и играет важную роль во всей теории тонкостенных стержней замкнутого профиля, роль которой такая же, как роль обычной секториальной координаты $\omega = \int_0^s r ds$ в теории стержней открытого профиля [2, 7]. Обратим внимание на одно существенное свойство обобщенной секториальной координаты $\bar{\omega}(s)$ из (15), а именно: обобщенная секториальная координата $\bar{\omega}$ не зависит от выбора точки начала отсчета дуговой координаты s (рис. 3). Укажем, что величина $\alpha(s)$ в (15)

$$\alpha(s) = \frac{J_k}{\omega_k} \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \omega$$

характеризует распределение депланационных перемещений вдоль сечения замкнутого профиля при чистом кручении тонкостенного стержня. Именно поэтому $\alpha(s)$ именуют функцией депланации (11), в которой ω_k принимается согласно формуле (14), а J_k – момент инерции чистого кручения сварного стержня, составленного из вертикалов и полок с параметрами $\delta_i \times h_i$:

$$J_k = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{h_i \delta_i^3}{3} ,$$

где $\alpha > 1,5$. Для получения матрицы жесткости $[K]_{14 \times 14}^{jk}$ тонкостенного стержня замкнутого профиля вычислим потенциальную энергию внутренних сил через напряжения σ и τ из (7) и (8):

$$V = \int_0^l \oint \frac{\sigma^2}{2E} \delta ds dz + \int_0^l \oint \frac{\tau^2}{2G} \delta ds dz . \tag{16}$$

Подстановка (7) и (8) в (16), с учетом (9) и (10), после преобразований дает [9]

$$V = \int_0^l \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{B^2}{2EJ_{\bar{\omega}}} \right) dz + \int_0^l \left(\frac{H^2}{2GJ_z} + \frac{Q_x^2 \mu_{xx}}{2GA} + \frac{Q_y^2 \mu_{yy}}{2GA} + \frac{M_{\bar{\omega}}^2 \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{2\rho^2 GA} + \frac{Q_x Q_y \mu_{xy}}{GA} + \frac{Q_x M_{\bar{\omega}} \mu_{x\bar{\omega}}}{\rho GA} + \frac{Q_y M_{\bar{\omega}} \mu_{y\bar{\omega}}}{\rho GA} \right) dz . \tag{17}$$

Коэффициенты формы сечения μ_{ij} , где $i, j = x, y, \omega$, в (17) определяются по формулам

$$\mu_{xx} = \frac{A_0}{J_y^2} \oint \frac{\bar{S}_{oy}^2}{\delta} ds ; \quad \mu_{yy} = \frac{A_0}{J_x^2} \oint \frac{\bar{S}_{ox}^2}{\delta} ds ;$$

$$\mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = \frac{J_\rho}{J_{\bar{\omega}}^2} \oint \frac{\bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2}{\delta} ds; \quad \mu_{xy} = \frac{A_0}{J_x J_y} \oint \frac{\bar{S}_{oy} \bar{S}_{ox}}{\delta} ds; \quad (18)$$

$$\mu_{x\bar{\omega}} = \frac{\sqrt{J_\rho A_0}}{J_y J_{\bar{\omega}}} \oint \frac{\bar{S}_{oy} \bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{\delta} ds; \quad \mu_{y\bar{\omega}} = \frac{\sqrt{J_\rho A_0}}{J_x J_{\bar{\omega}}} \oint \frac{\bar{S}_{ox} \bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{\delta} ds.$$

В (17) и (18) J_ρ и ρ – это полярный момент инерции и полярный радиус инерции стержня соответственно; $\bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}}$ – геометрическая характеристика сечения стержня, определяемая по формуле [9]:

$$\bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = \bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}} - \frac{J_{\bar{\omega}}}{\omega_k}. \quad (19)$$

Дополнительно укажем, что входящие в состав (18) и (19) функции, как и $\bar{\omega}$ из (15),

$$\bar{S}_{ox} = S_{ox} - \frac{1}{\omega_k} \oint S_{ox} \rho ds;$$

$$\bar{S}_{oy} = S_{oy} - \frac{1}{\omega_k} \oint S_{oy} \rho ds;$$

$$\bar{S}_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = S_{\bar{\omega}\bar{\omega}} - \frac{1}{\omega_k} \oint S_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \rho ds, \quad (20)$$

не зависят от выбора начала отсчета дуговой координаты s и являются однозначной характеристикой всякой точки, принадлежащей профилю поперечного сечения стержня (рис. 4).

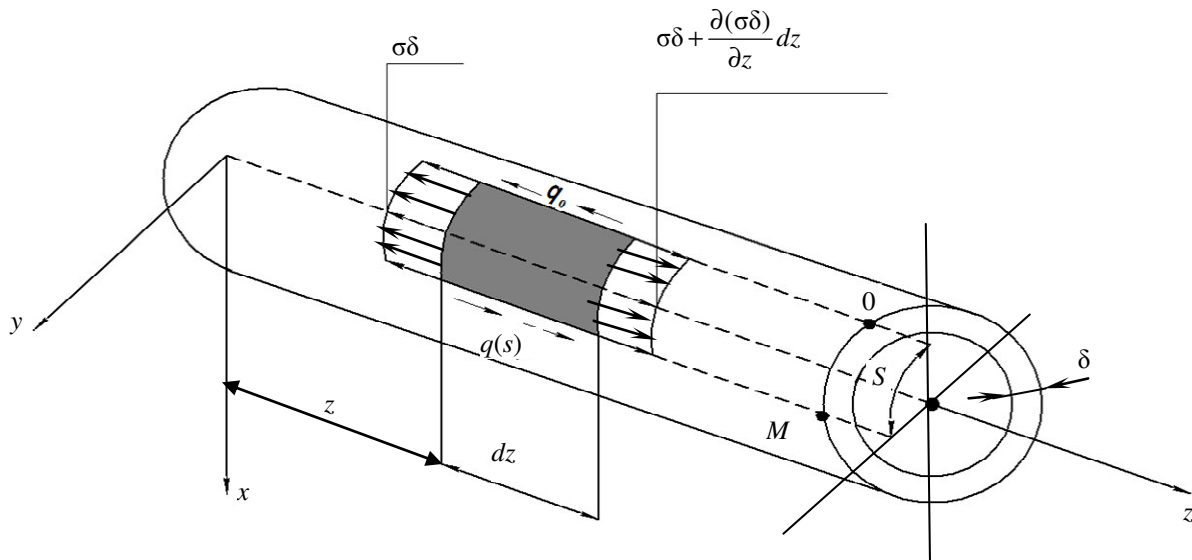


Рис. 4. Равновесие выделенного элемента тонкостенного стержня замкнутого профиля

Как следует из рис. 4, в (19) и (20) A_0, S_{ox}, S_{oy} представляют собой площадь и статические моменты отсеченной части сечения, расположенной между начальной точкой сечения O и текущей точкой M с координатой S . Величина $S_{\bar{\omega}\bar{\omega}}$ называется секториальным статическим моментом отсеченной части сечения тонкостенного стержня замкнутого профиля (рис. 4). Очевидно, что

$$A_0 = \int_0^s \delta ds; S_{ox} = \int_0^s y \delta ds; S_{oy} = \int_0^s x \delta ds; S_{o\bar{\omega}} = \int_0^s \bar{\omega} \delta ds.$$

Пусть ξ, η, ζ – перемещения точек линии центров изгиба стержня в направлении осей x, y и z его МСК. Подставим (4) с заменой коэффициентов по (5) и (6) в (3) и учтем известные дифференциальные зависимости

$$\begin{aligned} EA\zeta' &= N; & EJ_x\eta'' &= -M_x; & EJ_y\xi'' &= M_y; \\ EJ_x\eta''' &= -Q_x; & EJ_y\xi''' &= -Q_y; & EJ_{\bar{\omega}}\frac{\theta''}{\mu} &= -B; \\ EJ_{\bar{\omega}}\frac{\theta'''}{\mu} &= -M_{\bar{\omega}}; & GJ_z\theta' &= H; & \mu &= 1 - \frac{J_z}{J_\rho}, \end{aligned}$$

в которых J_ρ – направленный момент инерции (13), а также формулы (12) и, подставляя (3) в (17), после преобразований получим потенциальную энергию внутренних сил [7] тонкостенного стержня замкнутого профиля с учетом сдвига срединной поверхности:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EA(\zeta')^2 + EJ_y(\xi'')^2 + EJ_x(\eta'')^2 + EJ_{\bar{\omega}}(\beta')^2 \right\} dz + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ GJ_z(\beta^2 - 2\beta \frac{EJ_{\bar{\omega}}}{GJ_\rho\mu} \beta'' + \left(\frac{EJ_{\bar{\omega}}}{GJ_\rho} \right)^2 \frac{(\beta'')^2}{\mu} \right\} dz + \\ &+ \frac{1}{GA} \int_0^l \left\{ \frac{(EJ_y\xi''')^2 \mu_{xx}}{2} + \frac{(EJ_x\eta''')^2 \mu_{yy}}{2} + \frac{(EJ_x\eta''')(EJ_y\xi''') \mu_{xy}}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{(EJ_{\bar{\omega}}\beta''')^2 \mu_{\omega\omega}}{2r^2} + \frac{(EJ_y\xi''')(EJ_{\bar{\omega}}\beta''') \mu_{x\omega}}{r} + \frac{(EJ_x\eta''')(EJ_{\bar{\omega}}\beta''') \mu_{y\omega}}{r} \right\} dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее представим выражение для потенциальной энергии деформации (21) квадратичной формой обобщенных перемещений q_s , которое можно записать в виде двойной суммы

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{14} \left(\sum_{j=1}^{14} K_{ij} q_j \right) q_i. \quad (22)$$

Из (22) следует, что любой элемент K_{ij} матрицы жесткости $[K]_{14 \times 14}^{jk}$ можно получить как вторую производную от V из (21):

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 14. \quad (23)$$

Формирование матрицы жесткости тонкостенного стержня замкнутого профиля

Определение элементов матрицы жесткости по формуле (23) позволило сформировать матрицу жесткости тонкостенного стержня замкнутого профиля в МСК при пространственном деформировании с учетом сдвига срединной поверхности:

$$[K]_{14 \times 14}^{jk} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \dots & \dots & \dots & K_{114} \\ \dots & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & \dots & \dots & K_{214} \\ \dots & \dots & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & \dots & K_{314} \\ \dots & \dots & \dots & K_{44} & K_{45} & K_{46} & \dots & K_{414} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{1414} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

симметрично ненулевые элементы которой представлены формулами:

$$k_{1,1} = -k_{1,8} = k_{8,8} = \frac{EJ_y l}{12D_{yy}^2} + W_{yy} \frac{\mu_{xx}}{l};$$

$$k_{1,5} = k_{1,12} = -k_{5,8} = -k_{8,12} = \frac{EJ_y l^2}{24D_{yy}^2} + W_{yy} \frac{\mu_{xx}}{2};$$

$$k_{2,2} = -k_{2,9} = k_{9,9} = \frac{EJ_x l}{12D_{xx}^2} + W_{xx} \frac{\mu_{yy}}{l};$$

$$-k_{2,4} = -k_{2,11} = k_{4,9} = k_{9,11} = \frac{EJ_x l^2}{24D_{xx}^2} + W_{xx} \frac{\mu_{yy}}{2};$$

$$k_{1,2} = -k_{1,9} = -k_{2,8} = k_{8,9} = W_{xy} \frac{\mu_{xy}}{l};$$

$$k_{1,4} = -k_{1,11} = -k_{2,5} = -k_{2,12} = -k_{4,8} = k_{5,9} = -k_{8,11} = k_{9,12} = -W_{xy} \frac{\mu_{xy}}{2};$$

$$k_{4,5} = k_{4,12} = k_{5,11} = k_{11,12} = -W_{xy} \frac{\mu_{xy} l}{4};$$

$$k_{1,6} = -k_{1,13} = -k_{6,8} = k_{8,13} = W_{y\bar{w}} \frac{\mu_{x\bar{w}}}{l_{\mu r}};$$

$$k_{3,3} = -k_{3,10} = k_{10,10} = \frac{EA}{l};$$

$$k_{1,7} = k_{1,14} = -k_{5,6} = k_{5,13} = -k_{6,12} = -k_{7,8} = -k_{8,14} = k_{12,13} = -W_{y\bar{w}} \frac{\mu_{x\bar{w}}}{2\mu r};$$

$$k_{2,6} = -k_{2,13} = -k_{6,9} = k_{9,13} = W_{x\bar{w}} \frac{\mu_{y\bar{w}}}{l_{\mu r}};$$

$$k_{5,7} = k_{5,14} = k_{7,12} = k_{12,14} = -W_{y\bar{w}} \frac{\mu_{x\bar{w}} l}{4\mu r};$$

$$k_{4,7} = k_{4,14} = k_{7,11} = k_{11,14} = W_{x\bar{w}} \frac{\mu_{y\bar{w}} l}{4\mu r};$$

$$k_{2,7} = -k_{2,14} = k_{4,6} = -k_{4,13} = k_{6,11} = -k_{7,9} = -k_{9,14} = -k_{11,13} = -W_{x\bar{\omega}} \frac{\mu_{y\bar{\omega}}}{2\mu r};$$

$$k_{4,4} = \frac{EJ_x l^3}{12D_{xx}^2} + W_{xx} \frac{\mu_{yy} l}{4} - EJ_x D_x \left(\frac{l}{2D_{xx}} - \frac{D_x}{l} \right);$$

$$k_{5,5} = \frac{EJ_y l^3}{12D_{yy}^2} + W_{yy} \frac{\mu_{xx} l}{4} - EJ_y K_y \left(\frac{l}{2D_{yy}} - \frac{K_y}{l} \right);$$

$$k_{4,11} = \frac{EJ_x l^3}{12D_{xx}^2} + W_{xx} \frac{\mu_{yy} l}{4} - \frac{EJ_x}{4D_{xx}} (D_x l + K_x l^2) + EJ_x K_x D_x;$$

$$k_{5,12} = \frac{EJ_y l^3}{12D_{yy}^2} + W_{yy} \frac{\mu_{xx} l}{4} - \frac{EJ_y}{4D_{yy}} (K_x l - D_x l^2) - EJ_y K_y D_y;$$

$$k_{6,6} = -k_{6,13} = \frac{GJ_z l^3}{120D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} l}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 \mu^2} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z l \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{3D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 r^2 A} + W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \frac{\mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{lr^2} \left(\frac{4J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu} \right);$$

$$k_{6,7} = k_{6,14} = \frac{GJ_z l^2}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} \left(\frac{l^2}{6D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - K_{\bar{\omega}} \right) - \frac{EJ_{\bar{\omega}} l^2}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 \mu^2} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(\frac{l^2}{8D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - K_{\bar{\omega}} \right) - \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{2\mu^2} \right);$$

$$k_{7,7} = \frac{GJ_z l^3}{8D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} \left(\frac{l^2}{10D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - K_{\bar{\omega}} \right) + \frac{EJ_{\bar{\omega}}}{\mu^2} \left(\frac{l^3}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} - \frac{K_{\bar{\omega}} l}{2D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} + \frac{K_{\bar{\omega}}^2}{l} \right) +$$

$$+ \frac{GJ_z K_{\bar{\omega}}^2 l}{3} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{2D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(K_{\bar{\omega}} - \frac{l^2}{6D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \right) + \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l}{4r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu^2} \right);$$

$$k_{7,13} = \frac{GJ_z l^2}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} \left(K_{\bar{\omega}} - \frac{l^2}{6D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \right) + \frac{EJ_{\bar{\omega}} l^2}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 \mu^2} - \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{2D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(\frac{l^2}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - K_{\bar{\omega}} \right) + \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{2r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu^2} \right);$$

$$k_{7,14} = \frac{GJ_z l^3}{16D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} \left(\frac{l^2}{D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - K_{\bar{\omega}} - D_{\bar{\omega}} l \right) + \frac{EJ_{\bar{\omega}}}{4D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu^2} \left(\frac{l^3}{3D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - lK_{\bar{\omega}} - l^2 D_{\bar{\omega}} + 4D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} D_{\bar{\omega}} K_{\bar{\omega}} \right) +$$

$$+ \frac{GJ_z D_{\bar{\omega}} K_{\bar{\omega}} l^2}{3} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l}{4D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(K_{\bar{\omega}} + lD_{\bar{\omega}} - \frac{l^2}{3D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \right) + \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{4r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu^2} \right);$$

$$k_{11,11} = \frac{EJ_x l^3}{12D_{xx}^2} + W_{xx} \frac{\mu_{yy} l}{4} - EJ_x K_x l \left(\frac{l}{2D_{xx}} - K_x \right);$$

$$k_{12,12} = \frac{EJ_y l^3}{12D_{yy}^2} + W_{yy} \frac{\mu_{xx} l}{4} + EJ_y D_y l \left(\frac{l}{2D_{yy}} + D_y \right);$$

$$k_{13,13} = \frac{GJ_z l^3}{120D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} l}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 \mu^2} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z l \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{6D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 r^2 A} + W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \frac{\mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{lr^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu^2} \right);$$

$$k_{13,14} = -\frac{GJ_z l^3}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} \left(\frac{l}{6D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - D_{\bar{\omega}} \right) + \frac{EJ_{\bar{\omega}} l^2}{24D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2 \mu^2} - \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l}{2D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(\frac{l}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - D_{\bar{\omega}} \right) + \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{2r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{\mu^2} \right);$$

$$k_{14,14} = \frac{GJ_z l^4}{8D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \left(\frac{l}{10D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - D_{\bar{\omega}} \right) + \frac{EJ_{\bar{\omega}} l}{\mu^2} \left(\frac{l^2}{12D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}^2} - \frac{D_{\bar{\omega}} l}{2D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} + D_{\bar{\omega}}^2 \right) + \frac{GJ_z D_{\bar{\omega}}^2 l^3}{3} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}} l^2}{D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} r^2 A} \left(1 + \frac{l}{D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} \right) + \frac{W_{\bar{\omega}\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2} \left(\frac{J_z \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{r^2 A} + \frac{1}{4\mu^2} \right),$$

где приняты следующие обозначения:

$$D_{xx} = \frac{l^2}{12} + \frac{EJ_x \mu_{xx}}{GA}; \quad D_{yy} = \frac{l^2}{12} + \frac{EJ_y \mu_{yy}}{GA}; \quad D_{\bar{\omega}\bar{\omega}} = \frac{l^2}{12} + \frac{EJ_{\bar{\omega}} \mu_{\bar{\omega}\bar{\omega}}}{GAR^2};$$

$$D_x = \frac{l^2}{4D_{xx}} + 1; \quad D_y = -\frac{l}{4D_{yy}} + \frac{1}{l}; \quad D_{\bar{\omega}} = \frac{l}{4D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} - \frac{1}{l};$$

$$K_x = \frac{l}{4D_{xx}} - \frac{1}{l}; \quad K_y = \frac{l^2}{4D_{yy}} + 1; \quad K_{\bar{\omega}} = \frac{l^2}{4D_{\bar{\omega}\bar{\omega}}} + 1;$$

$$W_{i,j} = \frac{E^2 J_i J_j}{GAD_{i,i} D_{j,j}}; \quad i, j = x, y, \bar{\omega}. \quad (25)$$

Выводы

В заключение отметим, что для целей практических расчетов корабельных, крановых и других машиностроительных конструкций при формировании матриц жесткости полной системы со многими степенями свободы матрицу (24) отдельного стержня следует представить в блочном виде, для случая, в расчетной модели конструкции, когда номер узла k не следует за номером узла j :

$$[K]_{14 \times 14}^{jk} = \begin{bmatrix} [K]_{7 \times 7}^{ij} & [K]_{7 \times 7}^{jk} \\ [K]_{7 \times 7}^{kj} & [K]_{7 \times 7}^{kk} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

в которой, как известно,

$$[K]_{7 \times 7}^{kj} = \left([K]_{7 \times 7}^{jk} \right)^T.$$

Кроме того, при использовании матрицы (26) следует учитывать возможность получения из формул (25) матрицы жесткости конечного элемента массивного стержня размером 12×12 , широко представленную, в том числе в нормативной литературе [10], для чего в формулах (25) следует исключить влияние на ее компоненты как стесненного кручения, так и сдвига срединной поверхности, обусловленного касательными напряжениями (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жинкин В. Б. Теория и устройство корабля: учебник / В. Б. Жинкин. СПб.: Судостроение. 2002. 336 с.
2. Юзиков В. П. Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности / В. П. Юзиков, О. Б. Завьялова // Изв. вузов. Строительство. 2011. № 1. С. 108–115.
3. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
4. Синельщиков А. В. Динамика и сейсмостойкость мостовых кранов: дис. ... канд. техн. наук / А. В. Синельщиков. Астрахань: АГТУ, 2000. 276 с.
5. Семенов П. И. Расчет прочности и деформативности анизотропных тонкостенных стержней открытого профиля / П. И. Семенов. Киев: Выща шк., 1974. 184 с.
6. Панасенко Н. Н. Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. В 2-х частях. Ч. 1 / Н. Н. Панасенко, В. П. Юзиков, А. В. Синельщиков // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Морская техника и технология. 2015. № 2. С. 89–100.

7. Юзиков В. П. Строительная механика тонкостенных стержней / В. П. Юзиков, Н. Н. Панасенко; под ред. д-ра техн. наук Н. Н. Панасенко. Волгоград: Волгоград. науч. изд-во, 2013. 361 с.

8. Уманский А. А. Строительная механика самолета / А. А. Уманский. М.: Оборонгиз, 1961. 529 с.

9. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы: учеб. пособие / В. И. Сливкер. М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2005. 736 с.

10. РД 24-090-83-87. Нормы расчета пространственных металлоконструкций грузоподъемных кранов атомных станций на эксплуатационные и сейсмические воздействия

Статья поступила в редакцию 05.04.2016

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Синельщиков Алексей Владимирович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский инженерно-строительный институт; канд. техн. наук, доцент; зав. кафедрой «Прикладная механика и графика»; laex@bk.ru.

Панасенко Николай Никитович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский государственный технический университет; д-р техн. наук, профессор; профессор кафедры «Техника и технологии наземного транспорта»; psastr@mail.ru.



A. V. Sinelshchikov, N. N. Panasenko

MATHEMATICAL MODEL OF STIFFNESS PROPERTIES OF THIN-WALLED BARS OF CLOSED PROFILE OF THE SHIP STRUCTURES

Abstract. The calculation analysis of ship, crane and other engineering structures consisting of thin-walled bars of closed profile, based on the theory of thin-walled welded and hot rolled bars, still remains the subject of the research. The theoretical bases for building a mathematical model of thin-walled bar of closed profile in the local coordinate system at the spatial deformation taking into account the shift of the middle surface are given. The mathematical correlations for constructing the stiffness matrix of thin-walled spatial bar of closed profile, which can be used for static and dynamic analysis of ship structures calculated by finite element method, are obtained.

Key words: ship hull, thin-walled spatial bar of closed profile, stiffness matrix, mathematical model, finite element method.

REFERENCES

1. Zhinkin V. B. *Teoriia i ustroistvo korablia* [Theory and ship structure]. Saint-Petersburg, Sudostroenie Publ., 2002. 336 p.
2. Iuzikov V. P., Zav'ialova O. B. Raschet tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia s uchetom sdviga sredinnoi poverkhnosti [Calculation of thin-walled bars of open profile taking into account the shift of the middle surface]. *Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo*, 2011, no. 1, pp. 108–115.
3. Klaf R., Penzien Dzh. *Dinamika sooruzhenii* [Dynamics of the constructions]. Moscow, Stroizdat Publ., 1979. 320 p.
4. Sinel'shchikov A. V. *Dinamika i seismostoikost' mostovykh kranov: dis. ... kand. tekhn. nauk* [Dynamics and seismic resistance of bridge cranes: dis.cand.tech.sci.]. Astrakhan: AGTU, 2000. 276 p.
5. Semenov P. I. *Raschet prochnosti i deformativnosti anizotropnykh tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia* [Calculation of the strength and deformation capacity of anisotropic thin-walled bars of open profile]. Kiev, Vyshcha shkola, 1974. 184 p.
6. Panasenko N. N., Iuzikov V. P., Sinel'shchikov A. V. Konechno-elementnaia model' prostranstvennykh konstrukttsii iz tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia. V 2-kh chastiakh. Ch. 1 [Finite element model of spatial constructions with thin-walled bars of open profile. 2 volumes. Vol. 1]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Serii: Morskaia tekhnika i tekhnologiya*, 2015, no. 2, pp. 89–100.

7. Iuzikov V. P., Panasenko N. N. *Stroitel'naiia mekhanika tonkostennykh sterzhei* [Constructive mechanics of thin-walled bars]. Pod redaktsiei d-ra tekhn. nauk N. N. Panasenko. Volgograd, Volgograd. nauch. izd-vo, 2013. 361 p.
8. Umanskii A. A. *Stroitel'naiia mekhanika samoleta* [Constructing mechanics of a plane]. Moscow, Oborongiz Publ., 1961. 529 p.
9. Slivker V. I. *Stroitel'naiia mekhanika. Variatsionnye osnovy* [Constructing mechanics. Variating bases]. Moscow, Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2005. 736 p.
10. *RD 24-090-83-87. Normy rascheta prostranstvennykh metallokonstruktsii gruzopod'emnykh kranov atomnykh stantsii na ekspluatatsionnye i seismicheskie vozdeistviia* [Norms of calculations of spatial metal structures of cargo lifting cranes of nuclear stations for operational and seismic effects].

The article submitted to the editors 05.04.2016

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sinelshchikov Alexey Vladimirovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan Institute of Civil Engineering; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Head of the Department "Applied Mechanics and Graphics"; laex@bk.ru.

Panasenko Nickolay Nikitovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State Technical University; Doctor of Technical Sciences; Professor; Professor of the Department "Technique and Technology of Land Transport"; psastr@mail.ru.

