

УДК 539.4(076.5)

Н. Н. Панасенко, В. П. Юзиков, А. В. Синельщиков

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ. В 2-Х ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2

Расчетный анализ конструкций, состоящих из тонкостенных стержней, до настоящего времени остается предметом исследований. Приведены теоретические основы построения математической модели тонкостенного стержня открытого профиля, в которой учитывается влияние сдвигов и перемещений точек и углов закручивания поперечных сечений на величину и характер распределения внутренних усилий. Получены математические соотношения для построения матрицы масс тонкостенного стержня открытого профиля, которая может быть использована при динамическом расчетном анализе конструкций методом конечных элементов.

Ключевые слова: тонкостенный стержень открытого профиля, сдвиг и угол закручивания поперечных сечений, матрица масс, метод конечных элементов.

Введение

Выполнение требований надежности и работоспособности сооружений, обеспечивающих технологические процессы в морских и речных портах, определяется эксплуатационными характеристиками сооружений, заданными на стадии их проектирования и расчетного анализа. В [1] отмечалось, что большинство подобных сооружений представляют собой стержневые конструкции, несущие элементы которых являются стержнями открытого или закрытого профиля. Для решения задач по обоснованию статической прочности пространственных конструкций в [1] была приведена методика построения матрицы жесткости стержня открытого профиля. Однако, при расчете пространственных конструкций, составленных из тонкостенных стержней, на динамическое воздействие по методу конечных элементов (МКЭ), необходимо знать не только матрицу жесткости, но и матрицу масс каждого стержня [2].

Математическая модель матрицы масс тонкостенного стержня открытого профиля

Для формирования матрицы масс КЭ, с учетом правила знаков для перемещений и усилий, которые принимаем по рис. 1, определим функционал его кинетической энергии при пространственном деформировании в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^A \rho \left[\left(\frac{\partial \xi_M}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_M}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_M}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала КЭ.

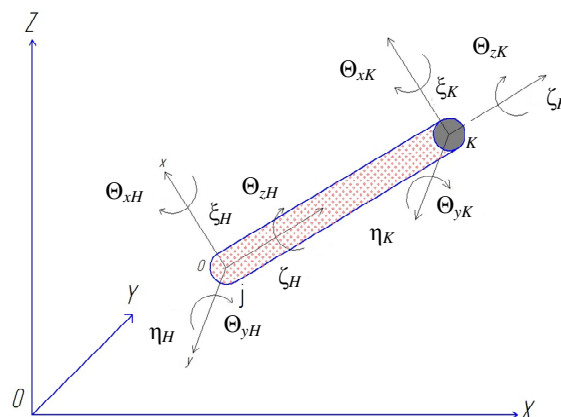


Рис. 1. Правило знаков для узловых перемещений тонкостенного стержня открытого профиля

В формуле (1) поперечные перемещения точки $M(x, y)$ срединной поверхности стержня определяются формулами [2]:

$$\begin{aligned}\xi_M &= \xi - (y - a_y)\Theta, \\ \eta_M &= \eta + (x - a_x)\Theta.\end{aligned}\quad (2)$$

При учете сдвига срединной поверхности стержня продольные перемещения точки $M(x, y)$ равны:

$$\zeta_M = \zeta - (\xi - \varphi_y)' x - (\eta - \varphi_x)' y - [(1 + K_{\omega\omega})\Theta - \varphi_\omega]' \omega. \quad (3)$$

В формулах (2), (3) ξ, ζ, η – компоненты перемещения центра изгиба с координатами [2]:

$$\begin{aligned}a_x &= b_x + \frac{1}{I_x} \int_A \omega_b y dA - K_{x\omega}, \\ a_y &= b_y + \frac{1}{I_y} \int_A \omega_b x dA - K_{y\omega}.\end{aligned}\quad (4)$$

В формуле (3)

$$\begin{aligned}\varphi_y' &= \frac{1}{GI_d} (K_{yy} Q_x + K_{yx} Q_y), \\ \varphi_x' &= \frac{1}{GI_d} (K_{xy} Q_x + K_{xx} Q_y), \\ \varphi_\omega' &= \frac{K_{\omega\omega} L}{GI_d}.\end{aligned}$$

Геометрические характеристики поперечного сечения стержня K_{ij} , входящие в выражения (1)–(3), вычисляются по формуле

$$K_{ij} = \frac{I_d}{I_i I_j} \int_A \frac{S_i S_j}{\delta^2} dA, \quad (5)$$

в которой i и j принимают значения x, y, ω ; δ – толщина контура сечения.

Подставляя (2) и (3) в (1) и интегрируя по площади A , получим:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ A \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ &+ 2A \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} a_y - \frac{\partial \eta}{\partial t} a_x \right] \frac{\partial \Theta}{\partial t} + I_y \left[\frac{\partial}{\partial t} (\xi - \varphi_y)' \right]^2 + I_x \left[\frac{\partial}{\partial t} (\eta - \varphi_x)' \right]^2 + \\ &\left. + I_\omega \left[\frac{\partial}{\partial t} [(1 + K_{\omega\omega})\Theta - \varphi_\omega]' \right]^2 \right\} dz,\end{aligned}\quad (6)$$

где, с учетом (4),

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{I_x + I_y}{A}.$$

При рассмотрении линейных (малых) колебаний кинетическую энергию (6) представим квадратичной формой скоростей на обобщенных перемещениях \dot{q} :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{14} \left(\sum_{i=1}^{14} m_{st} \dot{q}_i \right) \dot{q}_s. \quad (7)$$

Тогда инерционные коэффициенты матрицы масс конечного элемента $jk m_{st}$

$$[M]_{14 \times 14} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \dots & \dots & m_{1,14} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \dots & \dots & m_{2,14} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & \dots & \dots & m_{3,14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{s,j} & \dots & \dots & \dots & m_{s,t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{14,1} & m_{14,2} & m_{14,3} & \dots & \dots & m_{14,14} \end{bmatrix}_{14 \times 14} \quad (8)$$

с использованием (7) вычисляются по формуле

$$m_{st} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_t}, \quad m_{st} = m_{ts}, \quad (s, t = 1, 2, \dots, 14). \quad (9)$$

В качестве компонентов перемещений стержня жестко закрепленного по концам примем перемещения:

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 1, 5, 8, 12, \\ \eta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 2, 4, 9, 11, \\ \zeta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 3, 10, \\ \Theta(z) &= \sum q_s \psi_s(z), \quad s = 6, 7, 13, 14, \end{aligned}$$

в которых q_s – узловое перемещение, соответствующее его степеням свободы ($s, t = 1, 14$), $\psi_s(z)$ – аппроксимирующие функции Эрмита [3]:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \psi_2(z) = \psi_6(z) = 1 - 3z^2/l^2 + 2z^3/l^3, \\ \psi_5(z) &= -\psi_4(z) = -\psi_7(z) = z - 2z^2/l + z^3/l^2, \\ \psi_8(z) &= \psi_9(z) = \psi_{13}(z) = 3z^2/l^2 - 2z^3/l^3, \\ \psi_{12}(z) &= -\psi_{11}(z) = \psi_{14}(z) = -z^2/l + z^3/l^2, \\ \psi_3(z) &= 1 - z/l, \\ \psi_{10}(z) &= z/l. \end{aligned} \quad (10)$$

Следуя (9) и (10), легко установить, что матрица масс пространственного тонкостенного стержня (8) имеет порядок 14×14 , а ее элементы, определяемые по формуле (9), составляют матрицу масс тонкостенного стержня открытого профиля в местной системе координат при пространственном деформировании с учетом сдвига срединной поверхности. При ее получении использовались следующие зависимости:

$$Q_x = -EI_y \xi''', \quad Q_y = -EI_x \eta''', \quad L = H + M_\omega, \quad H = GI_d \Theta', \quad M_\omega = -EI_\omega \Theta''',$$

в которых L – полный крутящий момент.

Приведем элементы матрицы масс $m_{st} = m_{ts}$ (8), учитывающие сдвиг срединной поверхности:

$$\begin{aligned}
 m_{2,2} = m_{9,9} &= \rho \left\{ \frac{13A \cdot l}{35} + \frac{6J_x}{5l} + \frac{4J_x}{l} (K_x + K_x^2) + \frac{4J_x}{l} K_x^2 \cdot K_{xy}^2 \right\}, \\
 m_{4,4} = m_{11,11} &= \rho \left\{ \frac{A \cdot l^3}{105} + \frac{2J_x \cdot l}{15} + J_x \cdot K_x^2 \cdot l + J_x \cdot l \cdot K_x^2 \cdot K_{xy}^2 \right\}, \\
 m_{2,11} = m_{4,9} &= -\rho \left\{ \frac{13A \cdot l^2}{420} + \frac{J_x}{10} + J_x (K_x + 2K_x^2) + 2J_y \cdot K_x^2 \cdot K_{xy}^2 \right\}, \\
 m_{2,4} &= -\rho \left\{ \frac{11A \cdot l^2}{210} + \frac{J_x}{10} + J_x (K_x + 2K_x^2) + 2J_y \cdot K_x^2 \cdot K_{xy}^2 \right\}, \\
 m_{4,11} &= -\rho \left\{ \frac{A \cdot l^3}{140} + \frac{J_x l}{30} - J_x \cdot l \cdot K_x^2 - J_y \cdot l \cdot K_x^2 \cdot K_{xy}^2 \right\}, \\
 m_{2,9} &= -\rho \left\{ \frac{9A \cdot l}{70} + \frac{6J_x}{5l} - \frac{4J_x \cdot K_x^2}{l} - \frac{4J_x \cdot K_x^2 \cdot K_{xy}^2}{l} \right\}, \\
 m_{6,6} &= \rho \left\{ \frac{13A \cdot r^2 \cdot l}{35} + \frac{6J_\omega}{5l} + \frac{4J_\omega}{l} (K_\omega + K_\omega^2) \right\}, \\
 m_{7,7} = m_{14,14} &= \rho \left\{ \frac{A \cdot r^2 \cdot l}{105} + \frac{2J_\omega l}{15} + J_\omega \cdot K_\omega^2 \cdot l \right\}, \\
 m_{6,14} = m_{7,13} &= \rho \left\{ \frac{13A \cdot r^2 \cdot l^2}{420} + \frac{J_\omega}{10} + J_\omega (K_\omega + 2K_\omega^2) \right\}, \\
 m_{7,14} &= \rho \left\{ \frac{A \cdot r^2 \cdot l^3}{140} + \frac{J_\omega l}{30} - J_\omega \cdot K_\omega^2 \cdot l \right\}, \\
 m_{6,13} &= -\rho \left\{ \frac{9A \cdot r^2 \cdot l}{70} + \frac{6J_\omega}{5l} + \frac{4J_\omega K_\omega^2}{l} + 2J_\omega K_\omega \right\}, \\
 m_{6,7} &= -\rho \left\{ \frac{11A \cdot r^2 \cdot l}{210} + \frac{J_\omega}{10} + J_\omega (K_\omega + 2K_\omega^2) \right\}, \\
 m_{1,6} &= \rho \frac{13A \cdot a_y}{35} l, & m_{2,6} &= -\rho \frac{13a_x}{35} l, \\
 m_{4,7} &= -\rho \frac{A \cdot a_x \cdot l^3}{105}, & m_{5,7} &= -\rho \frac{A \cdot a_y \cdot l^3}{105}, \\
 m_{6,9} &= \rho \frac{9A \cdot a_x \cdot l}{70}, & m_{6,8} &= -\rho \frac{9A \cdot a_y \cdot l}{70}, \\
 m_{7,11} &= -\rho \frac{A \cdot a_x \cdot l^3}{140}, & m_{7,12} &= -\rho \frac{A \cdot a_y \cdot l^3}{70},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 m_{2,14} &= \rho \frac{13A \cdot a_x \cdot l^2}{420}, & m_{1,14} &= -\rho \frac{13A \cdot a_y \cdot l^2}{420}, \\
 m_{1,7} &= -\rho \frac{11A \cdot a_x \cdot l^2}{210}, & m_{2,7} &= \rho \frac{11A \cdot a_y \cdot l^2}{210}, \\
 m_{1,2} &= \rho \left\{ \frac{12E \cdot J_x \cdot J_y \cdot K_{xy}}{G \cdot J_d \cdot l^3} \left[\frac{12E}{G \cdot J_d \cdot l^2} - (J_x \cdot K_{xx} + J_y \cdot K_{yy}) - 2 \right] \right\}, \\
 m_{1,11} &= \rho \left\{ \frac{6E \cdot J_x \cdot J_y \cdot K_{xy}}{(G \cdot J_d)^2 \cdot l^2} K_{xy} \left[1 - \frac{12E \cdot J_y \cdot K_{yy}}{l^2 \cdot G \cdot J_d} - \frac{12E \cdot J_x \cdot K_{xx}}{l^2 \cdot G \cdot J_d} \right] \right\}, \\
 m_{1,4} &= \rho \left\{ \frac{6E \cdot J_x \cdot J_y \cdot K_{xy}}{G \cdot J_d \cdot l^2} - \frac{72E^2 \cdot J_x \cdot J_y}{(G \cdot J_d)^2 \cdot l^4} K_{xy} (J_x \cdot K_{xx} + J_y \cdot K_{yy}) \right\},
 \end{aligned}$$

где, с учетом (5),

$$K_x = -\frac{6EJ_x K_{xx}}{GJ_d l^2}, \quad K_\omega = -\frac{6EJ_\omega K_{\omega\omega}}{GJ_d l^2}. \quad (12)$$

Аналитическая оценка влияния деформаций сдвига срединной поверхности на собственные частоты тонкостенного стержня открытого профиля

Рассмотрим стержневой элемент (рис. 2) длиной $l = 0,6$ м с поперечным сечением в виде широкополочного двутавра размерами $b = h = 12$ см, $\delta_n = \delta_{ст} = 1$ см, у которого $A = 34$ см², $I_x = 809$ см⁴ (ось X параллельна полкам), $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $GI_d = 10,9$ кН · м², $\rho = 7,85$ т/м³.

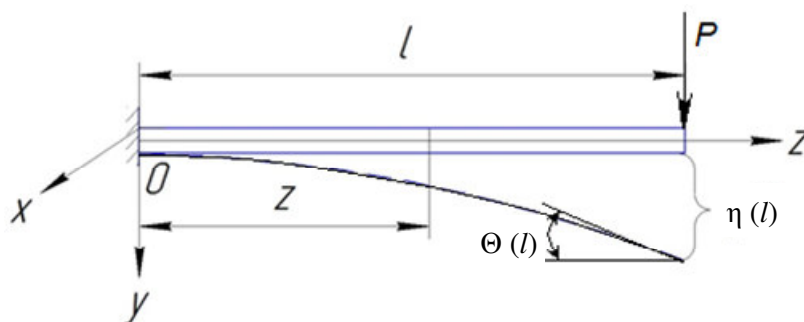


Рис. 2. Поперечный изгиб консольного стержня

Определим первую частоту собственных колебаний консольной балки, как конечного элемента с двумя степенями свободы, без учета сдвига срединной поверхности и инерции поворота. Матрицу масс вычислим с использованием формул (11), полагая в них, согласно (12), $K_{xx} = K_{yy} = 0$ и $J_y = 0$, а матрицу жесткости конечного элемента, без учета деформаций сдвига, определим по формулам из [4].

Вычисляем элементы матрицы масс:

$$m_{9,9} = \rho \left(\frac{13Al}{35} \right), \quad m_{11,11} = \rho \left(\frac{Al^3}{105} \right), \quad m_{9,11} = m_{11,9} = \rho \left(\frac{11Al^2}{210} \right), \quad (13)$$

которая, согласно (13), имеет вид

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{9,9} & m_{9,11} \\ m_{11,9} & m_{11,11} \end{bmatrix},$$

или, в численных значениях,

$$[M] = \begin{bmatrix} 5,948 \cdot 10^{-3} & 5,033 \cdot 10^{-4} \\ 5,033 \cdot 10^{-4} & 5,491 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

В элементах матрицы жесткости

$$k_{9,9} = \frac{4EI_x}{l^3} A_x, \quad k_{11,11} = \frac{EI_x}{l} (1 - A_x), \quad k_{9,11} = k_{11,9} = \frac{2EI_x}{l^2} A_x$$

коэффициенты A_x , вычисляемые по формуле

$$A_i = \frac{3}{1 + 12K_{ii} \left(\frac{EJ_i}{\ell^2 GA} \right)}, \quad i = x, y, \omega, \quad (14)$$

примем равными $A_x = 3$.

Формируем матрицу жесткости:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{9,9} & k_{9,11} \\ k_{9,11} & k_{11,11} \end{bmatrix},$$

или, в численных значениях,

$$[K] = \begin{bmatrix} 9,438 \cdot 10^4 & 2,832 \cdot 10^4 \\ 2,832 \cdot 10^4 & 1,133 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Минимальное собственное число для матрицы, являющейся результатом перемножения $[M]^{-1} \cdot [K]$, равно: $\lambda_1 = 6,13 \times 10^6$. Тогда первая частота собственных колебаний балки будет:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2,476 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}. \quad (15)$$

Точное решение для первого тона колебаний консольного стержня (рис. 2) с распределенной массой известно из [5]:

$$\omega_1 = \left(\frac{1,875}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{A\rho}},$$

откуда $\omega_1 = 2,464 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$.

Разница полученного ω_1 по МКЭ (15) и точного решения составляет менее 0,5 %. Далее определим первую частоту собственных колебаний балки (рис. 2) с учетом сдвига срединной поверхности. Предварительно вычислим по формуле (5) $K_1 = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ для матрицы масс и по формуле (14) вычислим $A_x = 1,807$ для матрицы жесткости. Получим:

$$[M] = \begin{bmatrix} 6,052 \cdot 10^{-3} & 5,029 \cdot 10^{-4} \\ 5,029 \cdot 10^{-4} & 6,453 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 5,685 \cdot 10^4 & 1,706 \cdot 10^4 \\ 1,706 \cdot 10^4 & 7,948 \cdot 10^3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Минимальное собственное число матрицы $[M]^{-1} \cdot [K]$ с учетом (16) и (17) будет $\lambda_1 = 4,739 \cdot 10^6$, откуда частота первого тона

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2,177 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (18)$$

Таким образом, учет деформации сдвига срединной поверхности в консольном стержне двутаврового профиля (рис. 2) дает уменьшение частоты (18) первого тона колебаний на 11,6 %.

Рассмотрим стержень с шарнирным опиранием концов (рис. 3, а), для которого в [6, 7] было получено «точное» решение для частоты изгибных поперечных колебаний в плоскости yOz в замкнутой форме, при $a_x = a_y = K_{xy} = 0$ на основе (4) и (5).

$$\omega_y^2 = \frac{EJ_x \lambda^4}{\rho A} \frac{1}{1 + \frac{J_x \lambda^2}{A} + \frac{EJ_x \lambda^2}{GJ_d} \left(1 - \frac{\rho \cdot \omega_y^2}{E\lambda^2}\right) K_{xx}}. \quad (19)$$

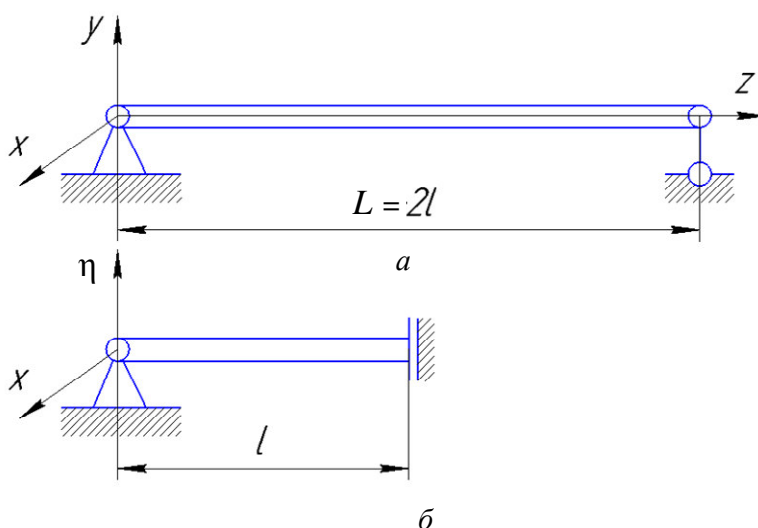


Рис. 3. Двутавровый стержень с шарнирным опиранием концов

Определим частоту колебания первого тона ($n = 1$), т. е. рассматривается симметричная форма колебаний $\eta'(l) = 0$ (рис. 3, б). Для примера, рассмотренного в [6, 8] ($A = 120 \text{ см}^2$, $J_x = 3,733 \times 10^4 \text{ см}^4$, $h = 40 \text{ см}$, $J_d = 40 \text{ см}^4$, $L = 400 \text{ см}$, $K_{xx} = 1,127 \text{ см}^2$, $E/G = 2,5 \left(\frac{h}{L} = \frac{1}{10}\right)$), получено по (19) «точное» решение:

$$\omega_y = \frac{9,08}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}. \quad (20)$$

Решим эту задачу по МКЭ. При принятых граничных условиях (рис. 3, б) формируем частотный определитель:

$$\|[K] - \omega_y^2 [M]\| = 0. \quad (21)$$

Имеем матрицы жесткости и масс:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{4,4} & k_{4,9} \\ k_{9,4} & k_{9,9} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{4,4} & m_{4,9} \\ m_{9,4} & m_{9,9} \end{bmatrix},$$

где коэффициенты матрицы жесткости определялись согласно [4]:

$$k_{4,4} = \frac{EJ_x}{l}(1 + A_x), \quad k_{4,9} = k_{9,4} = \frac{2EJ_x}{l^2}A_x, \quad k_{9,9} = \frac{4EJ_x}{l^3}A_x. \quad (22)$$

При этом величина $A_x = 1,677$ определялась по (14), а коэффициенты матрицы масс $m_{s,t}$ определены по соответствующим формулам матрицы (11):

$$m_{4,4} = \rho \left\{ A \frac{l^3}{105} + \frac{2}{15} \cdot J_x \cdot l + J_x \cdot K_x^2 \cdot l \right\},$$

$$m_{9,9} = \rho \left\{ Al \frac{13}{35} + \frac{6}{5} \frac{J_x}{l} + \frac{4J_x}{l} (K_x + K_x^2) \right\}, \quad (23)$$

$$m_{4,9} = m_{9,4} = -\rho \left\{ \frac{13}{420} \cdot Al^3 + \frac{J_x}{10} + J_x (K_x + 2K_x^2) \right\},$$

где K_x вычисляется согласно (12).

После подстановки числовых данных в (22) и (23) получим:

$$k_{4,4} = 2,667 \frac{EJ_x}{l}, \quad k_{9,9} = 6,708 \frac{EJ_x}{l^3}, \quad k_{4,9} = k_{9,4} = 3,354 \frac{EJ_x}{l^2},$$

$$m_{4,4} = 0,01177 \rho Al^3, \quad m_{9,9} = 0,4013 \rho Al, \quad m_{4,9} = m_{9,4} = -0,03082 \rho Al.$$

Частоту ω_y по МКЭ определим после раскрытия частотного определителя (21), который после раскрытия имеет вид

$$\omega_y^4 - 240,8 \frac{EJ_x}{\rho Al^4} \omega_y^2 + 1256,0 \frac{(EJ_x)^2}{\rho^2 A^2 l^2} = 0. \quad (24)$$

Решая уравнение (24), находим:

$$\omega_y = \frac{2,308}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}. \quad (25)$$

Полагая в (25) $l = 0,5L$ (рис. 3, б), получим окончательно

$$\omega_y = \frac{9,232}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}. \quad (26)$$

Расхождение (26) с «точным» решением (20) составляет 1,7 %. Как известно [6, 7], решение (26) без учета сдвига имеет вид

$$\omega_y = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}} = \frac{9,87}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}, \quad (27)$$

т. е. уменьшение частоты (26), вычисленной с учетом сдвига срединной поверхности по сравнению с (27), составило на 8 %. Дополнительно укажем, что с уменьшением отношения h/l (h – высота сечения) влияние сдвига возрастает. Так, при $L = 320$ см $\left(\frac{h}{L} = \frac{1}{8}\right)$ по формуле (19) получим «точное» решение

$$\omega_y = \frac{8,71}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}.$$

Решая задачу (24) по МКЭ, получим

$$\omega_y = \frac{8,73}{L^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho A}}. \quad (28)$$

Уменьшение частоты (28) при учете сдвига срединной поверхности и уменьшения длины двутавра с 400 до 320 см по сравнению с (27) составило 11,7 %.

На основании полученных результатов заключаем, что учет деформации сдвига срединной поверхности дает существенную поправку при вычислении частот собственных колебаний. Если принять во внимание приоритеты учета сдвига срединной поверхности тонкостенных стержней открытого профиля, можно перейти к задаче расчета пространственных конструкций, что реализовано нами при расчете остаточного ресурса металлоконструкций порталных кранов [9] как сварных систем, составленных из тонкостенных горячекатаных уголкового профиля (рис. 4).

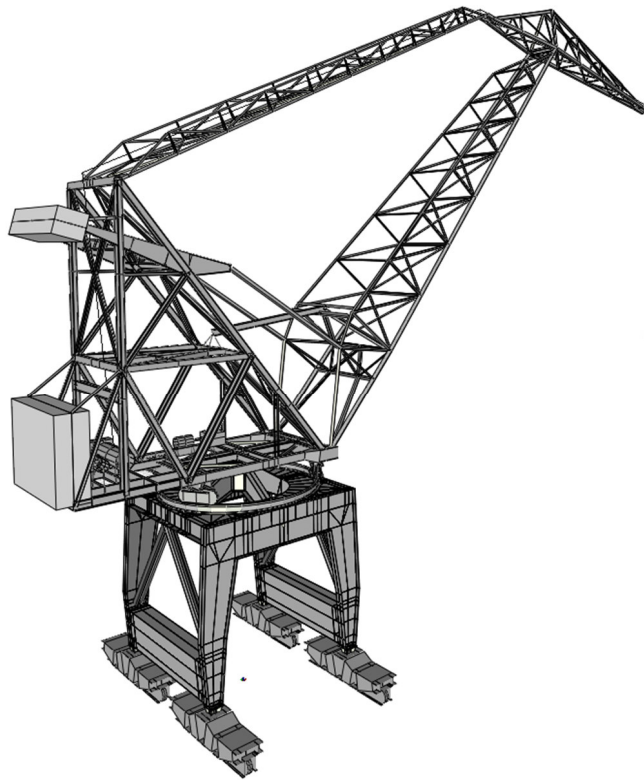


Рис. 4. Расчетно-динамическая конечно-элементная модель порталного крана «АБУС» г/п 16 т зав. № 1071487 з-да «Кранбау Эберсвальде» (Германия): 1638 узлов, 830 КЭ, степеней свободы $n = 11466$, масса крана 170 т

Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля

Решение поставленной задачи выполнено по конечно-элементному уравнению движения n -го порядка [2, 9, 10]:

$$[M]\{\ddot{V}\} + \left[\gamma_s ([M][K])^{0,5} \right] \{\dot{V}\} + [K]\{V\} = \{P_{ст}\} + \{P_{дин}\} - [M]\{\ddot{A}(t)\}, \quad (29)$$

в котором выражение перед $\{\dot{V}\}$ – матрица затухания Мартемьянова; $\{\ddot{A}(t)\}$ – вектор ускорения кинематических воздействий основания; γ_3 – коэффициент потерь, связанный с коэффициентом относительного демпфирования ξ ($\xi = 0,02-0,04$) зависимостью $\gamma_3 = 2\xi = 2\left(\delta_3 \left[(2\pi)^2 + \delta_3^2\right]^{-0.5}\right) \approx \delta_3 / \pi$,

в которой δ_3 – логарифмический декремент затухания колебаний, присущий рассчитываемой конструкции. В уравнении движения (29) следует учесть, что матрицы жесткости и масс КЭ (далее – матрицы типа (8)) получены в местной системе координат $Oxyz$, являются симметричными и имеют блочную структуру:

$$[K^{jk}]_{14 \times 14}^{0xyz} = \begin{bmatrix} [K]_{7 \times 7}^{jj} & [K]_{7 \times 7}^{jk} \\ [K]_{7 \times 7}^{kj} & [K]_{7 \times 7}^{kk} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

в которых j и k обозначают узлы начала и конца КЭ соответственно.

Для получения матрицы полной системы $[K]_{n \times n}$ в общей системе координат $OXYZ$ матрицу КЭ (30) необходимо перевести из местной системы координат $Oxyz$ КЭ jk в общую $OXYZ$ с использованием матрицы преобразования координат $[T]_{14 \times 14}$ [11]:

$$[K^{jk}]_{14 \times 14}^{0XYZ} = [T]^T [K^{jk}]_{14 \times 14}^{0xyz} [T],$$

после чего матрица полной системы формируется методом суперпозиции:

$$[K]_{n \times n} = \sum_{jk=1}^{jk=s} \left([K^{jk}]_{14 \times 14}^{0XYZ} \right)_{n \times n} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,k} & \dots & k_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j,1} & \dots & k_{j,k} & \dots & k_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,k} & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

где s – число КЭ в полной системе.

Переход к расчетному анализу пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля по уравнению движения (29) вызвал затруднение в его решении, заключающееся в том, что для несущих конструкций оно, как правило, является жестким и его прямое интегрирование методами Рунге – Кутты, Адамса и др. приводит к существенным вычислительным трудностям. В связи с этим в качестве способа интегрирования системы уравнений движения (29) предлагается использовать опробованный нами жестко-устойчивый метод Гира в виде формул дифференцирования назад [12, 13], позволяющий контролировать знак производной df/du на каждом шаге интегрирования и эффективно строить алгоритм интегрирования системы дифференциальных уравнений движения [10, 14].

Заключение

В процессе развития теории тонкостенных стержней открытого профиля неоднократно возникали различного рода предложения по ее модификации, мотивированные попытками отказа от гипотезы отсутствия сдвигов и учитывающие тем или иным способом влияние деформаций сдвига на работу тонкостенного стержня.

Следуя общей идее, выдержанной в [3, 4], учтено влияние деформаций сдвига включением в выражение для энергии деформации тонкостенного стержня открытого профиля той ее части, которая вызвана работой касательных напряжений. Эта идея по существу является переносом на теорию тонкостенных стержней соответствующей процедуры, использованной другими авторами при переходе от теории балок Бернулли – Эйлера к теории балок Тимошенко, а также при переходе от теории Кирхгофа изгиба пластин к теории Рейсснера. Такая схема рассуждений в части учета деформации сдвига в теории тонкостенных стержней, впервые представленная в работе Л. Н. Воробьева [8], привела к одному из наиболее простых вариантов сдвиговой теории тонкостенных стержней, представленному в настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Панасенко Н. Н.* Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. Ч. 1 / Н. Н. Панасенко, В. П. Юзиков, А. В. Синельщиков // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Морская техника и технология. 2015. № 2. С. 89–100.
2. *Юзиков В. П.* Строительная механика тонкостенных стержней / В. П. Юзиков, Н. Н. Панасенко. Волгоград: Волгоград. науч. изд-во, 2013. 361 с.
3. *Панасенко Н. Н.* Сейсмостойкие подъемно-транспортные машины атомных станций / Н. Н. Панасенко, С. Г. Божко. Красноярск: Изд-во Краснояр. гос. ун-та, 1988. 208 с.
4. *Юзиков В. П.* Расчёт тонкостенных стержней открытого профиля с учётом сдвига срединной поверхности / В. П. Юзиков, О. Б. Завьялова. Новосибирск, Изв. вузов: Строительство. 2011. № 1. С. 108–115.
5. *Вибрации* в технике. Справочник. В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
6. *Воробьев Л. Н.* К вопросу об изгибно-крутильных колебаниях тонкостенных стержней / Л. Н. Воробьев, Л. В. Яицкий // Прочность, устойчивость и колебания инженерных сооружений: Новочеркасск. Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та. 1972. Т. 223. С. 43–50.
7. *Юзиков В. П.* Прочность и устойчивость внецентренно сжатых тонкостенных стержней открытого профиля за пределом упругости: дис. ... канд. техн. наук. Ростов н/Д: РИСИ, 1979. 168 с.
8. *Воробьев Л. Н.* Влияние сдвига срединной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля с недеформированным контуром / Л. Н. Воробьев // Тр. Новочеркасск. политехн. ин-та. 1955. № 26 (40). С. 92–111.
9. *Панасенко Н. Н.* Конечно-элементный анализ остаточного ресурса грузоподъемных кранов / Н. Н. Панасенко, А. В. Синельщиков // Механика и процессы управления: в 2 т. Т. 2. Материалы 44 Всерос. симпоз. М.: РАН, 2014. С. 158–169.
10. *Синельщиков А. В.* Численные методы нелинейного динамического анализа грузоподъемных кранов / А. В. Синельщиков // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер.: Подъемно-транспортные машины и оборудование. 2003. Вып. 4. С. 77–84.
11. *Синельщиков А. В.* Динамика и сейсмостойкость мостовых кранов: дис. ... д-ра техн. наук / А. В. Синельщиков. Астрахань, 2000. 276 с.
12. *Арушанян А. Б.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране / А. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.
13. *Gear C. W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations / C. W. Gear. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971. 350 p.
14. *Синельщиков А. В.* Дискретные методы динамического анализа грузоподъемных кранов / А. В. Синельщиков, М. Н. Хальфин // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Технические науки. 2007. № 3. С. 34–38.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Панасенко Николай Никитович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский государственный технический университет; г-р техн. наук, профессор; профессор кафедры «Техника и технологии наземного транспорта»; psastr@mail.ru.

Юзиков Владимир Петрович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский инженерно-строительный институт; канд. техн. наук, доцент; профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство»; laex@bk.ru.

Синельщиков Алексей Владимирович – Россия, 414056, Астрахань; Астраханский инженерно-строительный институт; канд. техн. наук, доцент; зав. кафедрой «Прикладная механика и графика»; laex@bk.ru.



N. N. Panasenko, V. P. Yuzikov, A. V. Sinelshchikov

FINITE ELEMENT MODEL OF THE SPATIAL CONSTRUCTIONS
FROM THIN-WALLED OPEN SECTION RODS.
IN 2 PARTS. PART 2

Abstract. The design analysis of the structures consisting of thin-walled rods, still remains a subject of the research. The paper presents the theoretical basis of the mathematical model of a thin-walled open section rod, which takes into account the impact of shifts and displacements of points and torsion angles of the cross sections on the size and nature of the distribution of internal forces. The mathematical relations for the construction of the matrix of mass of thin-walled open section rods, which can be used for dynamic analysis of the structures using the finite element method.

Key words: thin-walled open section rod, shift and torsion angle of cross sections, mass matrix, finite element method.

REFERENCES

1. Panasenko N. N., Iuzikov V. P., Sinel'shchikov A. V. Konechno-elementnaia model' prostranstvennykh konstrukttsii iz tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia. Chast' 1 [Finite element model of spatial constructions from thin-walled open section rods. Part 1]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaiia tekhnika i tekhnologiia*, 2015, no. 2, pp. 89–100.
2. Iuzikov V. P., Panasenko N. N. *Stroitel'naia mekhanika tonkostennykh sterzhnei* [Construction mechanics of thin walled rods]. Volgograd, Volgogradskoe nauchnoie izdatel'stvo, 2013. 361 p.
3. Panasenko N. N., Bozhko S. G. *Seismostoikiie pod"emno-transportnye mashiny atomnykh stantsii* [Earthquake resistant lifting-and-transport machines of the nuclear stations]. Krasnoyarsk, Krasnoyarskii gosudarstvennyi universitet Publ., 1988. 208 p.
4. Iuzikov V. P., Zav'ialova O. B. *Raschet tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia s uchetom sdviga sredinnoi poverkhnosti* [Calculation of the thin walled open section rods taking into account shift of the middle surface]. Novosibirsk, *Izvestiia vuzov, Stroitel'stvo* Publ., 2011, no. 1, pp. 108–115.
5. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik*. V 6 t. T. 1. Kolebaniia lineinykh sistem [Reference. In 6 vol. Vol. 1. Vibrations of the linear systems]. Pod redaktsiei V. V. Bolotina. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 352 p.
6. Vorob'ev L. N., Iaitskii. L. V. K voprosu ob izgibno-krutil'nykh kolebaniiax tonkostennykh sterzhnei [To the question of bending and torsional vibrations of thin walled rods]. *Prochnost', ustoiichivost' i kolebaniia inzhenernykh sooruzhenii. Trudy Novocherkasskogo politekhnicheskogo instituta*, 1972, vol. 223, pp. 43–50.
7. Iuzikov V. P. *Prochnost' i ustoiichivost' vnetsentrenno szhatykh tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profil'ia za predelom uprugosti: dis. ... kand. tekhn. nauk* [Strength and stability eccentric compressed thin walled open section rods beyond elasticity. Dis. cand. tech. sci.]. Rostov-on-Don, RISI, 1979. 168 p.
8. Vorob'ev L. N. Vliianie sdviga sredinnoi poverkhnosti na velichinu deformatsii i napriazhenii v tonkostennykh sterzhniakh otkrytogo profil'ia s nedeformirovannym konturom [Influence of the shift of the middle surface on the degree of deflection and stresses in the thin walled open section rods with non-deflected contour]. *Trudy Novocherkasskogo politekhnicheskogo instituta*, 1955, no. 26 (40), pp. 92–111.
9. Panasenko N. N., Sinel'shchikov A. V. *Konechno-elementnyi analiz ostatochnogo resursa gruzopod'emnykh kranov* [Finite element analysis of residual life of cranes]. *Mekhanika i protsessy upravleniia: v 2 t. T. 2. Materialy 44 Vserossiiskogo simpoziuma*. Moscow, RAN, 2014. P. 158–169.
10. Sinelytsikov A. V. Chislennyye metody nelineinogo dinamicheskogo analiza gruzopod'emnykh kranov [Numerical methods of non-linear dynamic analysis of the load lifting cranes]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pod"emno-transportnye mashiny i oborudovanie*, 2003, iss. 4, pp. 77–84.
11. Sinelytsikov A. V. *Dinamika i seismostoikost' mostovykh kranov: dis. ... kand. tekhn. nauk* [Dynamics and earthquake resistance of the bridge cranes. Dis. cand. tech. sci.]. Astrakhan, AGTU Publ., 2000. 276 p.
12. Arushanian A. B., Zaletkin S. F. *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na Fortrane* [Numerical solution of the ordinary differential equations using Fortran]. Moscow, MGU Publ., 1990. 336 p.
13. Gear C. W. *Numerical initialvalue problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971. 350 p.
14. Sinel'shchikov A. V., Khal'fin M. N. *Diskretnye metody dinamicheskogo analiza gruzopod'emnykh kranov* [Discrete methods of dynamic analysis of cranes]. *Izvestiia vuzov. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskii nauki*, 2007, no. 3, pp. 34–38.

The article submitted to the editors 13.04.2015

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Panasenko Nikolay Nikitovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan State Technical University; Doctor of Technical Sciences; Professor; Professor of the Department "Technique and Technology of Land Transport"; psastr@mail.ru.

Yuzikov Vladimir Petrovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan Institute of Civil Engineering; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Professor of the Department "Industrial and Civil Construction"; laex@bk.ru.

Sinelshchikov Alexey Vladimirovich – Russia, 414056, Astrakhan; Astrakhan Institute of Civil Engineering; Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor; Head of the Department "Applied Mechanics and Graphics"; laex@bk.ru.

