МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

В. Ю. Кучерова, Л. К. Кильчукова

СТАБИЛИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ БАЗОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Описана разработка процедур синергетического синтеза законов управления базовыми нелинейными динамическими системами, которые обеспечивают подавление режимов хаотического поведения. Представлено решение одной из характерных задач антихаотического управления – задачи подавления апериодических колебаний в таких системах. Разработаны синергетические законы управления хаотическими моделями Лоренца и Ресслера, обеспечивающие стабилизацию фазовых переменных. Введение синтезированных обратных связей приводит к возникновению в системах состояния равновесия. Проведено компьютерное моделирование синтезированных замкнутых динамических систем, подтверждающее теоретические положения синергетической теории. Синтезированные законы управления могут быть использованы в различных технических приложениях.

Ключевые слова: хаос, модель Лоренца, модель Ресслера, динамическая система, управление, синергетика, обратная связь, автоколебания.

Введение

В современной науке применение термина «хаос» связано с необходимостью описания систем, характеризующихся совершенно случайным, на первый взгляд, поведением и в то же время наличием в них скрытого порядка.

Чрезвычайно актуальная научная проблема управления хаосом не решена и по сей день. Из множества существующих аспектов ее решения в качестве наиболее важного можно отметить изучение различных методов и законов подавления нерегулярных колебаний в нелинейных системах, обладающих хаотической динамикой [1–3].

Проблема управления нелинейными объектами и процессами с хаотической динамикой имеет большое прикладное значение. Дело здесь не только в борьбе с хаосом, который часто нарушает качество функционирования сложных систем, но и в целесообразной для ряда технологических процессов идее возникновения «порядка из хаоса» [4].

Задача подавления нерегулярных колебаний относится к числу наиболее характерных задач управления хаотическими системами и заключается в таком формировании управляющих воздействий, при котором обеспечивается стабилизация изначально хаотической системы в равновесном стационарном состоянии. В дальнейшем считается, что имеется возможность влиять на поведение системы посредством некоторой внешней управляющей силы, т. е. управляющего воздействия, и это управляющее воздействие аддитивно входит в правую часть одного из дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы.

Цель исследования

В данной работе решается задача синтеза скалярных регуляторов, обеспечивающих подавление хаотических колебаний в базовых хаотических моделях Лоренца и Ресслера, при которых происходит стабилизация нерегулярных колебаний исходных систем в равновесном стационарном состоянии. Подобные задачи возникают при необходимости исключить нежелательные шумы, вибрации конструкций и т. д. [5, 6].

Одним из методов эффективного решения сложной задачи управления хаосом и синтеза объективных законов управления нелинейными системами с хаотической динамикой является метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), предложенный А. А. Колесниковым [1].

Синергетический синтез скалярных регуляторов базируется на идее введения последовательной совокупности инвариантных многообразий понижающейся геометрической размерности и поэтапной динамической декомпозиции исходной динамической системы. Тогда изображающая точка (ИТ), начав двигаться из произвольного начального состояния, последовательно будет перемещаться от одной поверхности притяжения к другой, пока не попадет на финишную поверхность $\psi_1 = 0 \to \psi_2 = 0 \to ... \to \psi_m = 0$. «Внутренние» многообразия топологически вкладываются во «внешние». Таким образом, возникает внутренний процесс самоуправления в синтезируемой системе. В результате происходит каскадное формирование последовательности внутренних управлений, сжимающих фазовый объем системы по направлению от внешней области фазового пространства к совокупности вкладываемых друг в друга внутренних областей вплоть до попадания ИТ в желаемое состояние системы.

Предположим, что в пространстве состояний замкнутой системы существует притягивающее инвариантное многообразие $\psi(\mathbf{x}) = 0$, которое является асимптотическим пределом фазовых траекторий. В общем случае таких многообразий может быть несколько (число инвариантных многообразий равно числу каналов управления), тогда ИТ устремляется к их пересечению. Для обеспечения попадания ИТ замкнутой системы «объект-регулятор» на инвариантное многообразие $\psi(\mathbf{x}) = 0$ необходимо, чтобы ее движение удовлетворяло некоторому устойчивому дифференциальному уравнению, записанному относительно агрегированной макропеременной $\psi(\mathbf{x})$. Такое уравнение в синергетической теории управления называется функциональным (эволюционным). Часто система функциональных уравнений задается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$T_s \dot{\psi}_s(t) + \varphi_s(\psi_s) = 0, \qquad s = 1, 2, ..., m; \quad T_s > 0,$$

где m – число заданных инвариантных многообразий; T_s – управляющий параметр; $\varphi_s(\psi_s)$ – функция, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1. $\varphi_s(\psi_s)$ должна быть непрерывна, однозначна и дифференцируема при всех ψ_s.
2. $\varphi_s(0) = 0$.
3. $\varphi_s(\psi_s) > 0$ при любых $\psi_s \neq 0$, т. е. они обращаются в нуль только на многообразиях $\psi_s = 0$, относительно которых система заданных функциональных уравнений асимптотически устойчива в целом.

Наиболее часто в методе АКАР используются функциональные уравнения вида

$$T_s \dot{\psi}_s(t) + \psi_s = 0,$$

т. е. $\varphi_s(\psi_s) = \psi_s$. Уравнения данного типа, очевидно, обладают свойством асимптотической устойчивости относительно $\psi_s = 0$ при $T_s > 0$.

В этом случае задача синтеза законов стабилизирующего управления хаотическими системами в общем случае может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти функцию $u_S(\mathbf{x})$ как некоторую совокупность обратных связей, которые обеспечивают перевод ИТ исходной хаотической системы из произвольных начальных условий в некоторой допустимой области в заданное состояние (или состояния), соответствующее равновесному режиму $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$. В простейшем случае управление находится лишь в одном из дифференциальных уравнений модели. Возможны варианты, когда одно и то же управляющее воздействие входит в разные строки модели [2].

Принципиальной особенностью постановки задачи синергетического синтеза является дополнительное требование к характеру движения системы из начального состояния в конечное, заключающееся в асимптотическом стягивании траекторий к некоторому инвариантному многообразию (пересечению многообразий) в пространстве состояний системы.

Введение стабилизирующей обратной связи приводит к целенаправленному изменению топологии пространства состояний исходной системы. В результате такой перестройки происходит «гибель» хаотических аттракторов и рождение регулярных аттракторов типа «точка», соответствующих желаемому равновесному режиму.

Результаты исследования

Рассмотрим этапы процедуры синтеза стабилизирующего закона управления методом АКАР для модели Лоренца.

Уравнения системы Лоренца были получены из уравнений Навье – Стокса и теплопроводности для исследования возможности прогнозирования погодных условий. Модель описывает движение конвективных валов в жидкости при температурном градиенте.

Модель представляет собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида [7]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sigma x_2 - \sigma x_1, \\ \dot{x}_2(t) &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3(t) &= x_1 x_2 - b x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ – число Прандтля; ρ – нормированное число Рэлея; параметр b зависит от взаимоудаленности плоскостей и горизонтального периода.

В данной модели при определенных условиях генерируются хаотические колебания. На рис. 1 изображена фазовая траектория системы для $\sigma = 10$, $\rho = 24$, $b = 8/3$ в режиме детерминированного хаоса. В этой динамической системе впервые были исследованы стохастические автоколебания. Хаотический аттрактор модели (1) имеет принципиальные отличия от аттракторов большинства моделей нелинейной динамики. Его структура в полной мере соответствует странному аттрактору и содержит только седловой тип движения.

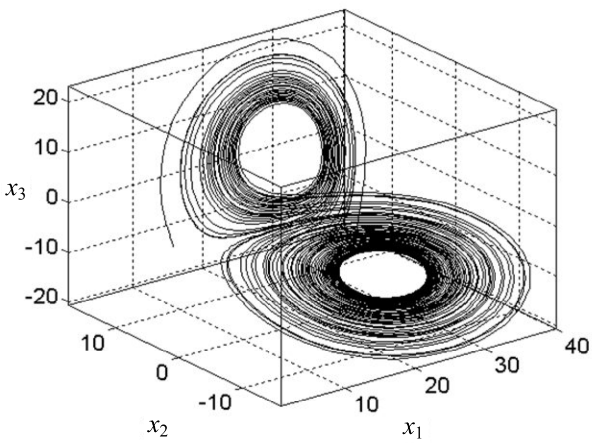

Рис. 1. Хаотический аттрактор системы Лоренца

Предположим, что управляющее воздействие u_1 в виде внутренней обратной связи присутствует в первом уравнении модели (1), т. е.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sigma x_2 - \sigma x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2(t) &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3(t) &= x_1 x_2 - b x_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Введем одно инвариантное многообразие:

$$\psi_1 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 - \mu x_2 + x_2^3, \tag{3}$$

где μ – управляющий параметр.

Дифференцируя функцию ψ_1 (3) по времени и подставляя ее производную в уравнение

$$T_1\dot{\psi}_1(t)+\psi_1=0, \tag{4}$$

получим выражение для искомого закона управления:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma(x_1-x_2)+\mu x_1+x_1-3x_1x_2^2+(3x_2^3-x_2-\mu x_2-bx_1x_3+ \\ &+x_1^2x_2)/(\rho-x_3)+(\mu x_2-\rho x_1+x_2+x_1x_3-x_2^3)/T_1(\rho-x_3), \end{aligned} \tag{5}$$

который обеспечивает перевод ИТ системы (2), замкнутой обратной связью (5), на многообразие $\psi_1=0$.

Движение ИТ системы по этому инвариантному многообразию описывается дифференциальными уравнениями декомпозированной системы, образующимися после подстановки $x_1=(x_2+\mu x_2-x_2^3)/(\rho-x_3)$ из равенства $\psi_1=0$ (3) во второе и третье уравнения модели (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2\psi}(t) &= \mu x_{2\psi}-x_{2\psi}^3, \\ \dot{x}_{3\psi}(t) &= -bx_{3\psi}+x_{2\psi}^2(1+\mu-x_{2\psi}^2)/(\rho-x_{3\psi}). \end{aligned} \tag{6}$$

На рис. 2, 3 представлены результаты моделирования системы (2), (5) при параметрах модели $\sigma=10$, $\rho=24$, $b=8/3$, характерных для возникновения хаотического аттрактора Лоренца, и параметрах регулятора $T_1=0{,}1$, $\mu=4$, подтверждающие эффективность теоретических положений метода АКАР. Первое уравнение в (6) совпадает с базовым эволюционным уравнением синергетики с бифуркацией типа «вилка».

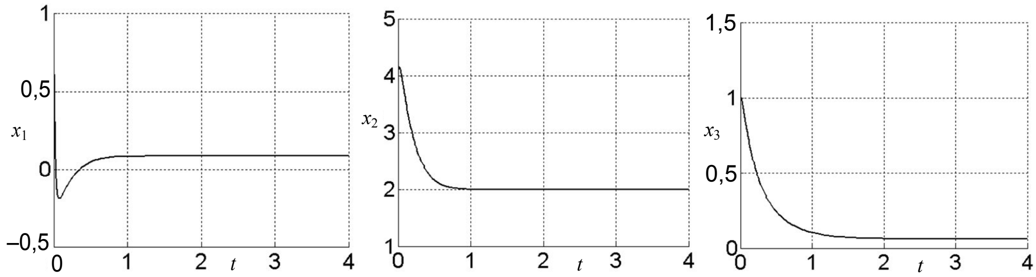

Рис. 2. Переходные процессы координат системы (2), (5)

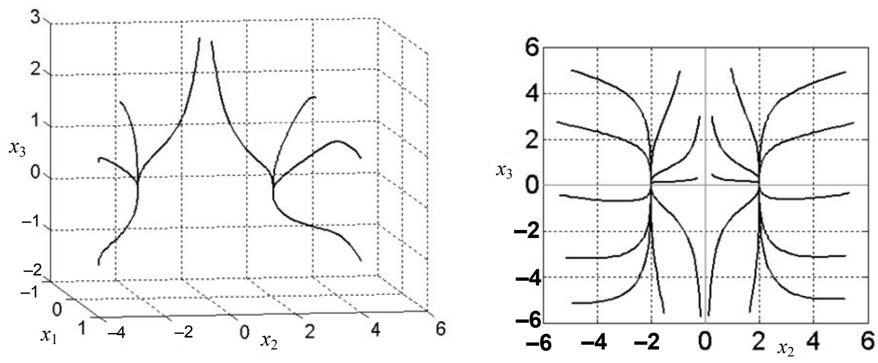

Рис. 3. Фазовые портреты систем (2), (5) и (6)

Теперь осуществим синтез стабилизирующего закона управления методом АКАР для моделиРесслера, которая представляет собой нелинейную динамическую систему, состоящую из трех дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3(t) &= bx_1 + x_1x_3 - cx_3, \end{aligned} \tag{7}$$

где a, b, c – параметры системы.

О. Русслер предложил использовать систему (7) для моделирования процессов взаимодействия некоторых химических веществ. Данная модель широко используется в исследованиях большого количества систем разнообразной природы, т. к. демонстрирует присущие им признаки возникновения и существования хаоса. На рис. 4 изображен хаотический аттрактор Русслера при параметрах $a = b = 0,2$, $c = 9$.

Предположим, что управление расположено во второй строке исходной системы (7):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1 + ax_2 + u_2, \\ \dot{x}_3(t) &= bx_1 + x_1x_3 - cx_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Инвариантное многообразие

$$\psi_2 = -x_2 - x_3 + \mu x_1 - x_1^3, \tag{9}$$

а также уравнение (4) дают возможность получения искомого закона:

$$u_2 = (\mu - 3x_1^2)(x_2 + x_3) - x_1 - ax_2 - bx_1 - x_1x_3 + cx_3 - (x_2 - x_1^3 + x_3 + \mu x_1), \tag{10}$$

который обеспечивает перевод ИТ системы (8), замкнутой обратной связью (10), на многообразие $\psi_2 = 0$ (9).

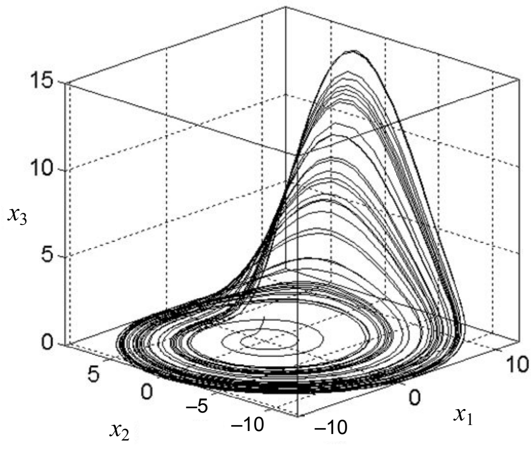

Рис. 4. Хаотический аттрактор системы Русслера

Движение системы вдоль многообразия $\psi_2 = 0$ описывает декомпозированная модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\psi}(t) &= \mu x_{1\psi} - x_{1\psi}^3, \\ \dot{x}_{3\psi}(t) &= bx_{1\psi} + x_{1\psi}x_{3\psi} - cx_{3\psi}, \end{aligned} \tag{11}$$

где уравнение бифуркации типа «вилка» присутствует в первой строке.

На рис. 5, 6 представлены результаты моделирования замкнутой системы (8), (10) для параметров модели $a = b = 0,2$, $c = 9$, характерных для существования хаотического аттрактора, и параметров регулятора $T_2 = 0,1$, $\mu = 25$.

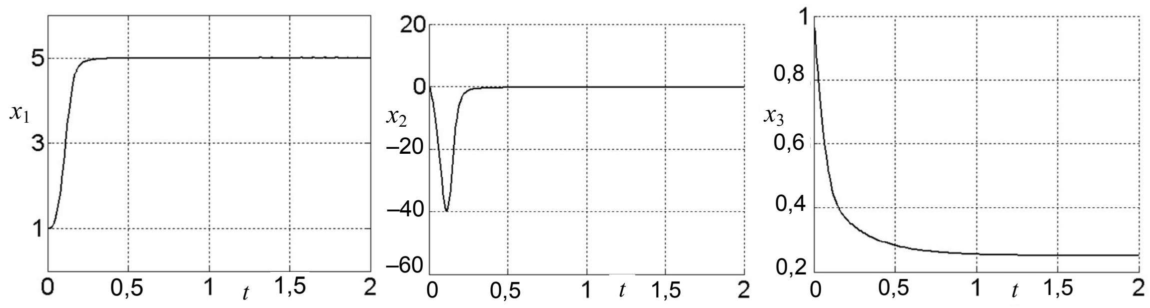

Рис. 5. Переходные процессы координат системы (8), (10)

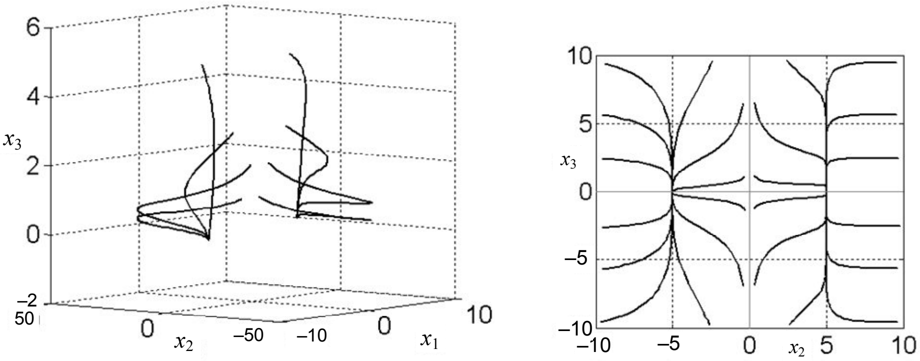

Рис. 6. Фазовые портреты систем (8), (10) и (11)

Первые уравнения в полученных декомпозированных системах (6), (11) совпадают с базовым эволюционным уравнением синергетики с бифуркацией типа «вилка». Этот факт подтверждает естественную природу полученных законов стабилизирующего управления и свидетельствует о единстве и внутренней взаимосвязи универсальных эволюционных уравнений синергетики и нелинейной теории самоорганизации.

Можно говорить о естественном характере полученных управляющих воздействий в связи с наличием у замкнутых систем ряда типичных бифуркационных свойств.

Выводы

Результатом исследования являются синтезированные обратные связи, при замыкании которыми исходных хаотических объектов происходит изменение их динамики и, как следствие, трансформация хаотических аттракторов в аттрактор, характеризующийся типом «точка». Законы управления u_1 (5) и u_2 (10) гарантируют асимптотическую устойчивость во всем фазовом пространстве относительно желаемых состояний равновесия при $\mu < 0$ или $\mu > 0$ для соответствующих исходных хаотических моделей. Законы управления u_1 (5) и u_2 (10) относятся к классу объективных законов управления, которые преобразовывают модели Лоренца иРесслера в базовые эволюционные уравнения синергетики, а также теории самоорганизации.

Полученные оригинальные законы управления u_1 (5) и u_2 (10) являются универсальными и могут использоваться при проектировании управляемых систем различного назначения, значительно повышая эффективность их функционирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колесников А. А.* Синергетическая теория управления / А. А. Колесников. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

2. *Современная* прикладная теория управления. Ч. II: Синергетический подход в теории управления / под ред. А. А. Колесникова. Москва – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. 558 с.

3. *Неймарк Ю. И.* Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. М.: Наука, 1987. 424 с.

4. *Колесников А. А.* Прикладная синергетика: основы системного синтеза / А. А. Колесников. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. 384 с.

5. *Анищенко В. С.* Лекции по нелинейной динамике / В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова // Изв. высш. учеб. завед. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 3. С. 186–191.

6. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику / Г. Г. Малинецкий. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 255 с.

7. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // J. Atmos. Sci. 1963. No. 20. P. 130–133.

8. *Rossler O. E.* An equation for continuous chaos / O. E. Rossler // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57A, no. 5. P. 397–398.

Статья поступила в редакцию 21.04.2015,
в окончательном варианте – 15.05.2015

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кучерова Валентина Юрьевна – Россия, 360004, Нальчик; Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова; канд. техн. наук; доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации»; paloma2002@rambler.ru.

Кильчукова Лиана Колевна – Россия, 360004, Нальчик; Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова; старший преподаватель кафедры «Системный анализ и компьютерные технологии управления»; kilchenok@mail.ru.

V. Yu. Kucherova, L. K. Kilchukova

STABILIZATION OF THE BALANCED MODES FOR BASIC NONLINEAR MODELS WITH CHAOTIC DYNAMICS

Abstract. The development of the procedures for synergetic synthesis of the laws of control of basic nonlinear dynamical systems, which provide chaotic modes suppression, is described. One of the most typical problems of the anti-chaotic control – the task of suppression of aperiodic fluctuations in such systems is solved. Synergetic laws of control of Lorenz and Ressler chaotic models providing stabilization of phase variables are developed. Introduction of the synthesized feedbacks leads to emergence in the systems of the balanced modes. The computer modeling of the synthesized closed dynamical systems is made; it confirms synergetic theory foundation. The synthesized control laws can be used in different technical applications.

Key words: chaos, Lorenz model, Ressler model, dynamical system, control, synergetics, feedback, auto-oscillations.

REFERENCES

1. Kolesnikov A. A. *Sinergeticheskaia teoriia upravleniia* [Synergetic theory of control]. Moscow, Energoatomizdat, 1994. 344 p.

2. *Sovremennaia prikladnaia teoriia upravleniia. Ch. II: Sinergeticheskii podkhod v teorii upravleniia* [Modern applied theory of control. Part II: Synergetic approach to the theory of control]. Pod redaktsiei A. A. Kolesnikova. Moscow – Taganrog, Izd-vo TRTU, 2000. 558 p.

3. Neimark Iu. I., Landa P. S. *Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniia* [Stochastic and chaotic oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 424 p.

4. Kolesnikov A. A. *Prikladnaia sinergetika: osnovy sistemnogo sinteza* [Applied synergy: the fundamentals of the system analysis]. Taganrog, Izd-vo TTI IuFU, 2007. 384 p.

5. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. Lektsii po nelineinoi dinamike [Lectures on nonlinear dynamics]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaia nelineinaia dinamika*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 186–191.
6. Malinetskii G. G. *Khaos. Struktury. Vychislitel'nyi eksperiment: Vvedenie v nelineinuiu dinamiku* [Chaos. Structures. Computational experiment: Introduction to nonlinear dynamics]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2002. 255 p.
7. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, no. 20, pp. 130–133.
8. Rossler O. E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A.*, 1976, vol. 57A, no. 5, pp. 397–398.

The article submitted to the editors 21.04.2015,
in the final version – 15.05.2015

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kucherova Valentina Yurievna – Russia, 360004, Nalchik; Kabardino-Balkarian State University; Candidate of Technical Sciences; Assistant Professor of the Department "Automated Systems of Information Processing"; paloma2002@rambler.ru.

Kilchukova Liana Kolevna – Russia, 360004, Nalchik; Kabardino-Balkarian State University; Senior Lecturer of the Department "System Analysis and Computer Technologies of Management"; kilchenok@mail.ru.